

UNIDAD DIDÁCTICA: TIRO PARABÓLICO 4º DE LA ESO



APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación
Secundaria

Curso Académico 2018/2019

José Enrique Cerón
Laura Díaz
Joaquín Martínez

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	3
1.1.	DESCRIPCIÓN DEL TEMA O PROBLEMÁTICA.....	3
1.2.	DESCRIPCIÓN DE LOS SUJETOS.....	3
1.3.	DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO CURRICULAR, ACADÉMICO Y SOCIOECONÓMICO.....	4
1.3.1.	CONTEXTO CURRICULAR.....	4
1.3.2.	CONTEXTO ACADÉMICO.....	5
1.3.3.	CONTEXTO SOCIOECONÓMICO.....	5
2.	ANÁLISIS DIDÁCTICO.....	6
2.1.	ANÁLISIS DE CONTENIDO.....	6
2.1.1.	CONOCIMIENTO CONCEPTUAL.....	6
	HECHOS.....	7
	ESTRUCTURAS.....	9
2.1.2.	CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL.....	10
2.1.3.	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.....	14
2.1.4.	FENOMENOLOGÍA.....	15
2.2.	ANÁLISIS COGNITIVO.....	16
2.2.1.	CARACTERIZACIÓN DE LAS CAPACIDADES.....	16
2.2.2.	DIFICULTADES Y ERRORES.....	17
2.3.	ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.....	19
2.3.1.	PLANTEAMIENTO GENERAL DE LAS SESIONES DE LA UNIDAD.....	19
2.3.2.	PAPEL Y AGRUPAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES.....	20
2.3.3.	PAPEL DEL PROFESOR.....	21
2.4.	ANÁLISIS DE EVALUACIÓN.....	22
2.4.1.	CRITERIOS.....	22
	MATEMÁTICAS - CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.....	23
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 4. FUNCIONES.....	25
	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES.....	25
	FÍSICA - CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 1. LA ACTIVIDAD CIENTÍFICA.....	26
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 4. EL MOVIMIENTO Y LAS FUERZAS.....	27
	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES.....	27
2.4.2.	INSTRUMENTOS.....	27
2.4.3.	MODELO DE EVALUACIÓN.....	28
3.	DISEÑO DE LAS TAREAS O ACTIVIDADES A PRESENTAR AL ALUMNO.....	30

3.1.	SESIÓN 1. INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD.....	30
3.1.1.	EJERCICIOS A REALIZAR.....	30
3.2.	SESIÓN 2. TRAYECTORIA DEL TIRO PARABÓLICO.....	32
3.2.1.	EJERCICIOS A REALIZAR.....	32
3.3.	SESIÓN 3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA TRAYECTORIA. DETERMINACIÓN DEL ALCANCE, ALTURA MÁXIMA Y TIEMPO DE VUELO DEL CUERPO.....	33
3.3.1.	EJERCICIOS A REALIZAR.....	33
3.4.	SESIÓN 4. PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO. CLASE TIC SOBRE ANÁLISIS DE LA PARÁBOLA EN GEOGEBRA.....	34
3.4.1.	EJERCICIOS A REALIZAR.....	35
3.5.	SESIÓN 5. REALIZACIÓN DEL EXPERIMENTO.....	36
3.6.	SESIÓN 6. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL EXPERIMENTO.....	37
3.7.	SESIÓN 7. PRESENTACIÓN LOS RESULTADOS.....	40
3.8.	SESIÓN 8. REPASO DE LA UNIDAD.....	40
3.8.1.	EJEMPLOS DE EJERCICIOS A REALIZAR.....	40
3.9.	SESIÓN 9. EXAMEN.....	41
4.	REFERENCIAS.....	42

1. INTRODUCCIÓN

En el presente documento se expone la unidad didáctica de “Tiro Parabólico”, incluida como actividad complementaria dentro del bloque 4 de “funciones” durante el desarrollo del curso de 4º de la ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Sirviendo además para desarrollar los conocimientos vistos durante el tema anterior de trigonometría.

1.1. DESCRIPCIÓN DEL TEMA O PROBLEMÁTICA

La unidad didáctica del “Tiro Parabólico” forma parte de una enseñanza interdisciplinar, concretamente la STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Es por ello que se tratarán simultáneamente la física y las matemáticas.

El empleo en las clases de esta metodología, permite al alumnado adquirir y comprender conceptos de una manera integrada, pudiendo así, ver diferentes conexiones entre conceptos de distintas asignaturas. Lo cual conlleva una mejora sustancial de las competencias adquiridas, contribuyendo considerablemente a que el alumnado tenga una visión mucho más innovadora.

STEM es un plan de estudios basado en la idea de educar a los estudiantes en cuatro disciplinas específicas: ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, en un enfoque interdisciplinario y aplicado (actualmente, se tiende a incluir artes, *STEAM*). En lugar de enseñar las cuatro disciplinas como asignaturas separadas y discretas, *STEM* las integra en un paradigma de aprendizaje cohesionado basado en aplicaciones del mundo real.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LOS SUJETOS

Los alumnos y alumnas a los que va dirigida esta unidad didáctica forman parte de un curso ordinario en un I.E.S situado en el centro de Santander. Tienen una edad comprendida entre los 14 y 15 años, constituyendo un grupo de 20 alumnos/as.

Dentro del grupo tenemos dos alumnos repetidores, ninguno tiene pendientes las matemáticas de 3º de la ESO y sus edades están comprendidas entre los 15 y los 16 años.

Además, tenemos un alumno recién incorporado al centro, procedente de Colombia, que, aunque no presenta demasiada dificultad para comunicarse, solamente en algunas palabras diferentes entre su castellano de origen y el que empleamos aquí, sí que presenta un desfase curricular de un curso aproximadamente, por lo que incluiremos actividades de refuerzo y en algunas en concreto tendremos un profesor de apoyo en el aula.

1.3. DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO CURRICULAR, ACADÉMICO Y SOCIOECONÓMICO

1.3.1. CONTEXTO CURRICULAR

Para elaborar esta unidad didáctica se han tenido en cuenta los criterios de evaluación, los contenidos y los estándares de aprendizaje evaluables del Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Concretamente establecemos esta unidad didáctica dentro del bloque 4 de funciones de la asignatura de matemáticas académicas de 4º de ESO y paralelamente en el bloque 4 del movimiento de la asignatura de física y química de 4º de ESO.

Al tratarse de una unidad didáctica STEM, se coordina la asignatura de matemáticas con la de física de tal manera que se ayude al alumnado a comprender mejor los conceptos.

El bloque 1 del currículo para ambas asignaturas se trata de manera transversal a lo largo de todo el contenido pues en él se hace referencia a la capacidad de analizar, experimentar e investigar. Así como el desarrollo de las capacidades que permiten al alumnado resolver problemas en otros contextos, valorándose su progreso tanto académico como humano.

1.3.2. CONTEXTO ACADÉMICO

La unidad de tiro parabólico se plantea dentro de la programación didáctica del departamento de matemáticas, para el curso de 4º de ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, concretamente una vez finalizado el bloque de trigonometría y como introducción al de funciones.

Según el actual currículo de educación secundaria la dedicación a esta materia es de 4 horas semanales, con esta unidad emplearemos entre dos y tres semanas para su desarrollo.

Cada sesión tendrá una duración de 50 minutos aproximadamente, estas se desarrollarán en su mayoría en el aula aunque también se recurrirá al aula de informática del centro.

La evaluación final se realizará por medio de un examen escrito.

1.3.3. CONTEXTO SOCIOECONÓMICO

El centro donde está enmarcada esta unidad didáctica es un instituto público que imparte la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato de dos modalidades, ciencias y humanidades y ciencias sociales.

El instituto está situado en pleno centro de Santander y lleva en funcionamiento más de veinte años. A él acude alumnado muy diverso, de diferentes culturas y clases sociales. Se caracteriza por su multiculturalidad y heterogeneidad.

2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

A continuación, se realizará un análisis didáctico en el que se plasmarán todos los aspectos que se tendrán en cuenta a la hora de la puesta en marcha de las clases en las que se tratará el tema del tiro parabólico. Dicho análisis está dividido atendiendo al contenido, a los aspectos cognitivos, a la instrucción y a la evaluación.

2.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Aquí se estudiará el contenido que forma parte de la unidad didáctica. En primer lugar, se definen los conceptos, es decir, el tema a tratar en sí mismo; a continuación, los procedimientos y la metodología; después los sistemas de representación; y, por último, la fenomenología.

2.1.1. CONOCIMIENTO CONCEPTUAL

Ahora describiremos el campo conceptual de la unidad, es decir, los hechos y conceptos necesarios para que el alumno sea capaz de desarrollar el tema de Funciones y ser capaz de utilizar las herramientas necesarias para la resolución de problemas y actividades, tanto dentro del aula, como fuera del aula.

Según lo estipulado en la LOMCE, los alumnos de 4º de E.S.O. de Matemáticas orientadas a enseñanzas académicas estudiarán, en el bloque de funciones (el más adecuado para explicar el tiro parabólico), los siguientes contenidos:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Definición formal de función. Expresión algebraica de una función. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de la función lineal y cuadrática. Funciones definidas a trozos.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: función de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, aplicaciones a contextos y situaciones reales
- Reconocimiento del crecimiento, los extremos, las discontinuidades, la periodicidad y las tendencias en gráficas de funciones.

Respecto al contenido de física, el contenido de la unidad se asocia al bloque 4 de la asignatura de 4º de la ESO, *El movimiento y las fuerzas*, donde se deberá enseñar:

- El movimiento.
- Movimientos rectilíneo uniforme (M.R.U.), rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.) y circular uniforme (M.C.U.).
- Naturaleza vectorial de las fuerzas.
- Leyes de Newton.
- Fuerzas de especial interés: peso, normal, rozamiento, centrípeta.
- Ley de la gravitación universal.

HECHOS

Por lo tanto, con el objetivo de dejar claros cuáles son los conceptos que el alumno ha de conocer, a continuación, se explican las definiciones clave de la unidad a estudiar:

Términos matemáticos:

- **Función:** regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto. Las funciones son relaciones entre los elementos de dos conjuntos.
- **Ecuación de segundo grado:** es una ecuación que tiene la expresión general: $ax^2+bx+c=0$, donde x es la variable, y a , b y c constantes; a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente.
- **Gráfica:** es un tipo de representación gráfica que permite conocer intuitivamente el comportamiento de dicha función.
- **Vértice:** es el punto donde se encuentran dos o más elementos unidimensionales (curvas, vectores, rectas, semirrectas o segmentos).
- **Máximos y mínimo:** son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto).

Términos físicos:

- Espacio: el lugar donde se encuentran los objetos y en el que los eventos que ocurren tienen una posición y dirección relativas.
- Gravedad: es una de las cuatro interacciones o fuerzas fundamentales. Origina la aceleración que experimenta un cuerpo físico en las cercanías de un objeto astronómico. También se denomina interacción gravitatoria o gravitación.
- Tiempo: magnitud física con la que medimos la duración o separación de acontecimientos.
- Velocidad: magnitud física de carácter vectorial que relaciona el cambio de posición (o desplazamiento) con el tiempo.
- Aceleración: magnitud derivada vectorial que nos indica la variación de velocidad por unidad de tiempo.

Notaciones matemáticas:

- Las operaciones trigonométricas seno, coseno y tangente se escribirán $\text{sen}\alpha$, $\text{cos}\alpha$, $\text{tg}\alpha$, siendo α el ángulo sobre el que se aplica.

Notaciones físicas:

- Las letras s , v , a , h , g y t se corresponden a espacio, velocidad, aceleración, altura, gravedad y tiempo.
- Las medidas de magnitudes, salvo que se indique lo contrario, se medirá según el Sistema Internacional.

Convenios:

- Se considera positivo un movimiento cuando se desplaza, según nuestro punto de referencia, de izquierda a derecha (eje x) y de abajo arriba (eje y). El movimiento en sentido contrario (en cada eje) será negativo. Los signos del movimiento en cada eje son independientes.
- Cualquier ejercicio o actividad, que esté resuelta según un
- Parábola: En matemáticas, una parábola es la sección cónica de excentricidad igual a 1, resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al

presentado por su generatriz. El plano resultará por lo tanto paralelo a dicha recta. Se define también como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta llamada directriz, y un punto exterior a ella llamado foco. En geometría proyectiva, la parábola se define como la curva envolvente de las rectas que unen pares de puntos homólogos en una proyectividad semejante o semejanza.

- Tiro parabólico: movimiento realizado por cualquier objeto cuya trayectoria describe una parábola. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. El movimiento parabólico es un ejemplo de un movimiento realizado por un objeto en dos dimensiones o sobre un plano. Puede considerarse como la combinación de dos movimientos que son un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical acelerado.

ESTRUCTURAS

Dado que hemos definido la unidad didáctica como una suma de conceptos matemáticos y físicos, a continuación, esbozaremos como pensamos que confluyen los diferentes conceptos de forma que el Tiro parabólico quede lo mejor explicado posible.



2.1.2. CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL

A continuación se expone la metodología (procedimientos, estrategias y algoritmos) empleada en la resolución del problema presentado. Esta metodología ha de ser entendida no solamente como una herramienta para lograr el objetivo planteado en la unidad didáctica, sino que también es un objetivo de aprendizaje en si misma, al proporcionar al alumnado diferentes estrategias de aprendizaje extrapolables a otros ámbitos y actividades, con lo que se fomenta el desarrollo de la competencia de aprender a aprender.

Esta unidad tiene un marcado carácter práctico, en la que se utilizan conceptos ya adquiridos en unidades y/o cursos anteriores así como en diferentes asignaturas, al estar englobada, como se indica en la introducción, dentro de una enseñanza multidisciplinar, concretamente trata sobre la interrelación entre las matemáticas y la física. Por lo tanto, se actuará en el desarrollo de estrategias que permitan la modelización y matematización de problemas físicos, en este caso el tiro parabólico, tratando que dichas metodologías sean extrapolables a otros problemas y a diferentes ámbitos de conocimiento.

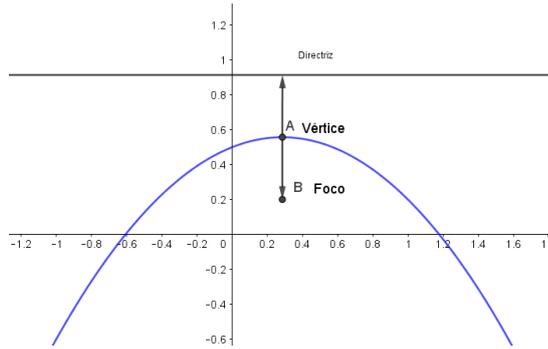
Otro aspecto importante o considerar dentro de unidad es la utilización de las TIC y su implementación en la metodología empleada para la resolución del problema planteado. En esta unidad didáctica se plantea la utilización de medios audiovisuales (móvil) para grabar el fenómeno físico a estudiar, y el uso de software de análisis de movimientos (TRACKER, ámbito físico) y software matemático (Geogebra) cuya combinación permite la obtención de los parámetros físicos que definen el problema y su posterior análisis matemático y representación gráfica.

Algoritmos

Los algoritmos que es necesario conocer y que se emplearán para la realización de esta unidad didáctica son los siguientes:

1. Ecuación de la parábola de eje vertical.

Extraer e identificar a partir de la ecuación de la parábola los elementos que la definen.



Ecuación de la parábola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Vértice. Es el extremo relativo de la parábola. Sus coordenadas son:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \quad y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Foco:

$$x_F = -\frac{b}{2a} \quad y_F = y_V + \frac{1}{4a}$$

Directriz

$$y_F = y_V - \frac{1}{4a}$$

2. Resolución de ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Representación gráfica de funciones de segundo grado.

- Analizar dominio y recorrido
- Determinar puntos de corte con los ejes coordenados
- Hallar extremo relativo. Máximo o mínimo.
- Analizar crecimiento y decrecimiento

4. Ecuación del tiro parabólico. Movimiento rectilíneo uniforme.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

La trayectoria del movimiento parabólico, o tiro parabólico, está formado por dos movimientos:

- Un movimiento rectilíneo uniforme (mru) en la dirección horizontal, siendo la velocidad constante en la dirección x, u horizontal. Es importante destacar que se desprecia el efecto del rozamiento del cuerpo con el aire en su movimiento. La ecuación que define su posición es:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

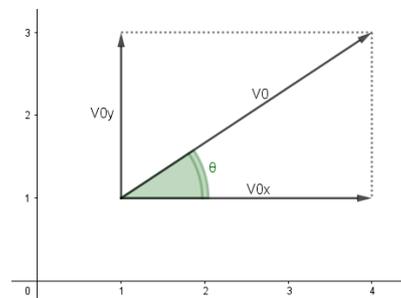
- Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (mrúa) en la dirección y o vertical generado por la gravedad. La posición y del cuerpo en cada momento depende de la velocidad inicial constante (v_{0y}) en la dirección vertical y de la aceleración de la gravedad ($a_y = -g$). La ecuación que define su posición es la siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$$

V_{0x} y V_{0y} , dependen del ángulo de lanzamiento del cuerpo, que en el caso de que se lance desde una rampa es el ángulo que forma esta con el plano horizontal. Por lo tanto, sus valores son:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sen\theta$$



Siendo v_0 la velocidad del cuerpo en el momento del lanzamiento y θ el ángulo de lanzamiento o de la plataforma inclinada.

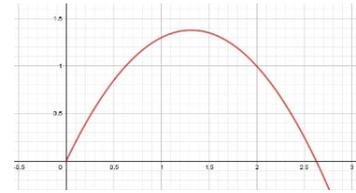
Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = x_0 + v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot \sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

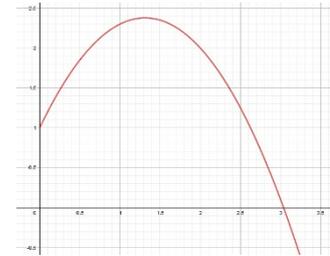
Para obtener la función que define la trayectoria se combinan las ecuaciones anteriores, eliminando la t , siendo el resultado el siguiente, considerando que el punto inicial (x_0, y_0) es el origen de coordenadas $(0, 0)$:

$$y = (\tan\theta) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} x^2$$



Si solamente se considera que $x_0=0$, entonces se tiene que:

$$y = y_0 + (\tan\theta) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} x^2$$



Siendo en ambos casos la ecuación de una parábola de eje vertical. Si se comparan las ecuaciones anteriores con la ecuación de la parábola, $y = Ax^2 + Bx + C$, se obtiene que los parámetros que las definen son:

1. (x_0, y_0) en el origen de coordenadas.

$$A = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} / B = \tan\theta / C = 0$$

2. $x_0=0 / y_0 \neq 0$.

$$A = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} / B = \tan\theta / C = y_0$$

Por tanto, conociendo los parámetros que definen la parábola, se pueden calcular los elementos que definen el tiro parabólico: la velocidad inicial (v_0), el ángulo de lanzamiento (θ) y la altura inicial del cuerpo (y_0). También se podría calcular la posición inicial x_0 , pero se ha preferido hacer que coincida con el origen de coordenadas para de esta manera poder trabajar con unas ecuaciones lo más simplificadas posibles, sabiendo además que la posición del origen se puede fijar de manera arbitraria para una mejor interpretación del problema.

Estrategias

Las principales estrategias necesarias para llevar a cabo la unidad son las siguientes:

- Planteamiento del problema. Dado que la unidad incluye la realización de un experimento, la primera de las estrategias necesarias es la planificación previa del problema a analizar. De entre los diferentes tipos de actividades que se pueden llevar a cabo hay que elegir el que se quiere realizar y como plantearle físicamente (elementos necesarios).
- Utilización de herramientas TIC.
- Matematización de un problema físico. Se de una unidad con características STEM, en la que partiendo de unos datos físicos estos se tratan con herramientas matemáticas: tablas y graficas de datos, ecuaciones... También se da el problema inverso, por ejemplo, conocida una ecuación (parábola) que define una trayectoria obtener los parámetros que definen dicho movimiento.
- Análisis, interpretación y comprobación de los resultados. Además de analizar matemáticamente el problema también hay que relacionar e interpretar dichas soluciones desde un punto de vista físico, es decir, la interpretación matemática también ha de ser posible físicamente. Por lo tanto, se hace una doble comprobación (matemática y física) de los resultados obtenidos, lo que fomenta el análisis crítico.

2.1.3. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Un mismo concepto matemático puede ser expresado mediante diferentes sistemas de representación, entendiendo estos como las diversas formas de formular dicho concepto y sus características inherentes. En la presente unidad se emplean los siguientes sistemas de representación.

Sistema de representación verbal. Este sistema se basa en la comunicación oral y escrita. Es fundamental en el planteamiento del problema y en su difusión.

Ejemplo: “Calcular el punto más alto de la trayectoria que sigue un sólido cuyo ángulo de salida con respecto al plano horizontal es de 45° y su velocidad inicial es de 30 metros por segundo”.

Sistema de representación algebraico. Mediante este sistema se expresan o traducen a *simbología matemática* los problemas y conceptos expuestos en la representación verbal. Es fundamental para poder realizar las operaciones y los cálculos que permitan resolver el problema planteado.

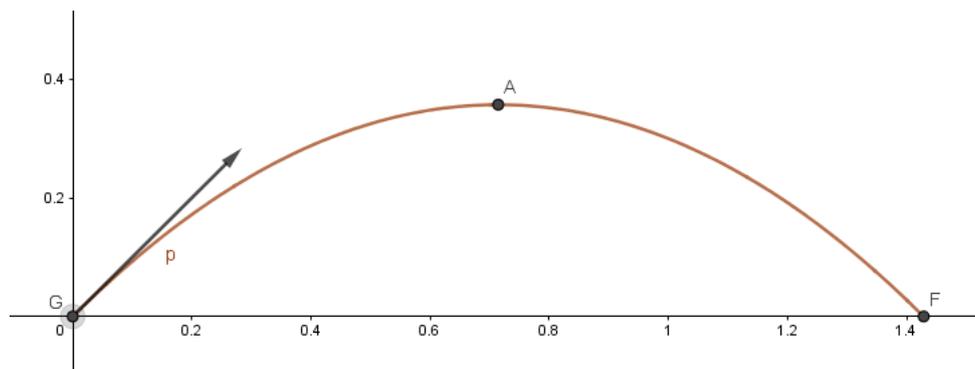
Ejemplo:

$$y = y_0 + (\tan\theta) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} x^2$$

Sistema de representación numérico. Este sistema es complementario del sistema algebraico al permitir obtener soluciones numéricas de las ecuaciones algebraicas utilizadas. En esta unidad también es complementario del sistema gráfico al representar gráficamente las coordenadas (x, y) de los puntos obtenidos de la trayectoria calculada, y al ser necesario para la resolución práctica de los problemas.

Sistema de representación gráfico. Este sistema permite expresar los conceptos de una forma gráfica lo que ayuda a la interpretación del problema representado. Uno de los objetivos de la unidad es obtener la representación gráfica en un sistema cartesiano de la trayectoria de un cuerpo y su posterior análisis.

Ejemplo:



Sistema de representación audiovisual. Consiste en la representación de conceptos mediante recursos audiovisuales.

2.1.4. FENOMENOLOGÍA

La fenomenología trata sobre las diferentes aplicaciones que tienen las funciones en la vida diaria. Esta unidad didáctica, sobre el tiro parabólico, tiene diferentes conocimientos que se utilizan en:

- Cálculo de trayectoria en el lanzamiento de proyectiles o cohetes, como los lanzados en la industria aeroespacial.
- El chorro de agua de las mangueras de bomberos, de forma que se pueda aplicar el agua de forma eficiente sobre el incendio.
- La trayectoria que describen diferentes bolas u objetos en ciertos deportes, como el lanzamiento de disco o el golf.

2.2. ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo se centra en el desarrollo de habilidades en el alumno mediante el aprendizaje. Lo dividiremos en la *Caracterización de las capacidades* que el alumno puede desarrollar gracias a los conceptos introducidos en el apartado anterior y las *Dificultades y errores* que cometen los alumnos durante el proceso de aprendizaje.

2.2.1. CARACTERIZACIÓN DE LAS CAPACIDADES

De acuerdo a lo establecido en el Decreto 38/2015 (Boletín Oficial de Cantabria, 2015), el alumno que curse matemáticas tendrá que aprender a identificar y explicar relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas, como ocurre a la hora de describir un tiro parabólico (posición-tiempo-velocidad, gráfica que describe el movimiento). Con las gráficas, además, el alumno deberá saber explicar y representar gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática... En definitiva, los alumnos tienen que saber interpretar críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.

Desde un punto de vista físico, el BOE recoge que el alumno debe distinguir los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea justificando su necesidad

según el tipo de movimiento. Además, relacionado directamente con las matemáticas, se pretende que constatar que el alumnado deduzca las expresiones matemáticas que relacionan las distintas variables en los movimientos rectilíneo uniforme (M.R.U.) y rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.), que son los dos que conforman el tiro parabólico.

Asimismo, las matemáticas (ya que, pese al carácter transversal de la asignatura al plantear el tiro parabólico, no deja de englobarse en la asignatura de matemáticas) favorecen en gran medida el desarrollo de las competencias en ciencia y tecnología, proporcionando un acercamiento al mundo físico a través de modelos matemáticos y fomentando destrezas que permitan usar correctamente recursos tecnológicos para identificar preguntas, resolver problemas, llegar a una conclusión o tomar decisiones basadas en pruebas y argumentos. Para fomentar su desarrollo de la competencia en comunicación lingüística desde el área de Matemáticas se debe insistir en la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso y por otra parte en que los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Con el lenguaje propio de funciones, así como con el uso de la calculadora y otras herramientas tecnológicas como Geogebra, contribuimos al desarrollo de la competencia digital. La autonomía en la resolución de problemas y la verbalización del proceso de resolución de los mismos favorece la competencia de aprender a aprender, mediante la reflexión de lo aprendido.

2.2.2. DIFICULTADES Y ERRORES

El estudio didáctico de los errores que cometen los alumnos a la hora de tratar con los conceptos matemáticos y físicos es de gran interés ya que pueden ser utilizados por el profesor para diseñar distintas actividades que ayuden a corregir dichos errores.

El origen de los errores es muy diverso. Algunos provienen de aprendizajes anteriores que, al ser utilizados en contextos distintos, el error aparece. También hay otros errores que son consecuencia del proceso de aprendizaje seguido por los

alumnos que, aunque les haya servido para la adquisición de ciertos contenidos, causan inercia que desencadena el error.

Todos los materiales, metodología y actividades realizadas con los alumnos en esta unidad tienen presente estos errores.

A continuación, recogeremos algunos de los errores encontrados por los alumnos en el aprendizaje y enseñanza del tiro parabólico, para los cuales se han buscado errores en conceptos directamente relacionados y ya mencionados, como funciones en matemáticas o el movimiento en física.

Autores como M^a Dolores de Prada en su monografía “El concepto de función: dificultades en su aprendizaje” diferencian los siguientes tipos de errores:

- Respecto a la arbitrariedad: en su mayoría los errores indican que los alumnos sólo admiten funciones bien definidas, donde se puede saber qué número corresponde a otro mediante una regla. Generalmente no admiten funciones de conjuntos que no sean numéricos ni funciones de las que no se pueda conocer su fórmula.

Estos errores pueden venir de la forma en la que se les han introducido las funciones previamente que ha hecho que creen una imagen mental determinada con unas características entre las que no está la arbitrariedad.

- Respecto a la representación gráfica: hay indicaciones de que los alumnos disocian función y representación gráfica. El alumno ve muchos objetos como tablas, enunciados fórmulas...donde sólo hay uno: la función.

En otros casos condicionan la naturaleza de la función a la de su representación, deciden que no es función porque no se puede representar o su gráfica es muy rara.

Otros autores ven problemas en la enseñanza de conceptos físicos, sobre todo a aquellos aplicados a su día a día, ya que los alumnos asocian términos como la posición o el desplazamiento, a un tiempo y un punto de referencia de forma muy poco flexible.

Tendremos todo esto en cuenta a la hora de plantear las distintas actividades para poder corregir estos errores con nuestra actividad como docentes.

2.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

A continuación, en el análisis de instrucción, se describe al detalle cómo se organizarán las clases relativas a la unidad didáctica. En primer lugar se hará un calendario en el que se indiquen qué contenidos se pretenden tratar; después se especificará el rol que tendrán los alumnos en las clases; y por último, se establece qué haremos nosotros como docentes en el aula.

2.3.1. PLANTEAMIENTO GENERAL DE LAS SESIONES DE LA UNIDAD

La unidad didáctica sobre funciones tendrá una duración de diez sesiones, siempre y cuando no haya ningún contratiempo en la realización de las actividades planeadas. Cada una de las sesiones tiene una duración de 50 minutos, pudiendo ser posible que algunas se junten en sesiones de 2 clases seguidas, si fuera interesante para ciertas experiencias. El esquema a seguir será el siguiente:

- Sesión 1: Introducción concepto de tiro parabólico.
- Sesión 2: Explicación del movimiento (MRU y MRUA) aplicado al tiro parabólico. Descomposición del movimiento. Alcance, altura y tiempo del proyectil.
- Sesión 3: Explicación de geometría (sen, cos, tg) aplicada al tiro parabólico. Representación gráfica, altura máxima, alcance.
- Sesión 4: Explicación del experimento a realizar. Clase TIC.
- Sesión 5: Experimento.
- Sesión 6: Explicación “práctica” (vídeos/ actividad práctica) del tiro parabólico. Conclusiones del experimento.
- Sesión 7: Representación de los resultados en gráficas.
- Sesión 8: Repaso.
- Sesión 9: Examen.

En cuanto al material que se utilizará, desarrollaremos las sesiones utilizando como elemento principal los apuntes facilitados a los alumnos, incluyendo referencias a material externo, como vídeos o actividades de otras fuentes. Los contenidos básicos se proporcionarán de forma que el alumno no dependa de otros medios, como internet, para su uso.

En la primera sesión comenzaremos trayendo al aula distintos tipos enunciados, tablas, gráficas donde aparecen los contenidos mínimos del tiro parabólico.

Para actividad de la séptima clase nos aprovecharemos de las TIC con el uso de ordenadores.

2.3.2. PAPEL Y AGRUPAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES

La mayoría de las actividades planteadas se realizarán de manera individual. Gran parte del desarrollo del razonamiento matemático se produce cuando el alumno se enfrenta totalmente solo ante el problema y busca estrategias lógico-matemáticas para intentar resolverlo. Todas las tareas que se han planeado para que se realicen fuera del horario lectivo son de carácter individual, al igual que el examen que realicen, que también lo será, y muchos de los ejercicios a realizar en clase. Es importante, a su vez, que los alumnos desarrollen su autonomía y su capacidad de aprender a aprender: las actividades individuales ayudarán a lograr este objetivo. Aunque en matemáticas la resolución escrita de los ejercicios constituye la parte más importante de los problemas por ser la más formal y, por tanto, requerir una comprensión más profunda de los conceptos, también será necesario desarrollar una buena capacidad de comunicación oral para poder explicar los problemas que los alumnos realicen en la pizarra. Así mismo, obtendrán más experiencia en hablar con público, necesario en múltiples ámbitos de la vida cotidiana.

Por otro lado, se organizarán igualmente varias actividades en grupo, como, por ejemplo, en la primera sesión de la unidad, donde se aproximan los conceptos que se utilizarán durante todo el tema. Así, los alumnos podrán aprovechar la diversidad existente dentro de su grupo para aprender los unos de los otros. El aprendizaje entre iguales es una estrategia muy útil a la hora de abordar un tema nuevo y será beneficiosa para los alumnos de todas las capacidades y contextos al tener que ponerse de acuerdo entre todos sobre qué respuesta habrá que dar. Los alumnos

con más dificultades para adquirir destrezas matemáticas podrán aprovechar el contacto con alumnos con más facilidad para aprender con sus compañeros, mientras que estos últimos necesitarán justificar y explicar las conclusiones obtenidas, lo que requiere un conocimiento de la materia más a fondo.

Por último, en la sesión 7 trabajarán en parejas y con recursos TIC. De nuevo, el aprendizaje entre iguales será una herramienta de gran utilidad, con la particularidad de que en este caso deberán corregir el ejercicio de su compañero. Este cruce de roles busca desarrollar la empatía entre los alumnos y su comunicación. Los recursos TIC se utilizan para profundizar en la utilización de estas herramientas con fines escolares, ya que muchas veces los alumnos de secundaria no conocen su aplicación más allá del ocio; y se estudian sus potencialidades como medios para aprender a aprender y ampliar conocimientos, con lo que se fomente también el aprendizaje a lo largo de la vida y fuera del aula.

2.3.3. PAPEL DEL PROFESOR

Para conseguir la mayor efectividad posible a la hora de conectar con los alumnos y conseguir que el proceso de enseñanza y aprendizaje se produzca de manera satisfactoria, creemos que la mejor estrategia es combinar diferentes metodologías y formas de trabajo de manera que podamos llegar al mayor número de alumnos posible.

Para la mayoría de las explicaciones, utilizaremos la clase magistral, el método más clásico para enseñar en secundaria. Con ello, se espera que los alumnos adquieran los conceptos y las habilidades matemáticas de manera rigurosa.

Sin embargo, conscientes de que el razonamiento matemático requiere así mismo reflexión y trabajo constante, es importante que los alumnos estudien de manera individual y autónoma. Se planean en esta unidad ejercicios para realizar fuera del horario lectivo con el objetivo de afianzar los conocimientos y que sean capaces de enfrentar un problema en solitario.

Durante algunas clases también se han planificado actividades grupales y en parejas que pretenden aprovechar los beneficios del aprendizaje entre iguales. Así, tanto los alumnos que demuestran una adquisición de las competencias más

avanzado como los que tienen más dificultades en este proceso sacan partido de este método, ya que los que ya han adquirido las competencias requieren un conocimiento muy elevado de la materia para poder explicar sus ideas al resto, mientras que los demás muchas veces muestran más interés y están más receptivos a aprender cuando es un compañero quien muestra sus ideas.

Con la utilización de las TIC se pretende fomentar también el aprendizaje basado en proyectos, donde no se apliquen los conocimientos aprendidos de manera automática, sino que se tenga que razonar su utilización y se deban adaptar a la situación tal y como se presentará en la vida real.

Como medida de atención a la diversidad para esta unidad, planteamos, además de la adaptación de las explicaciones y desarrollo de las clases a las necesidades individuales de los alumnos, una sesión antes del examen en la que se propongan actividades y ejercicios de repaso adecuados al nivel de adquisición de las competencias de cada uno de los estudiantes. De este modo, se dará una respuesta más eficaz a nuestro alumnado para ayudarles, según la teoría de Vygotski, a aprender dentro de su zona de desarrollo próximo.

2.4. ANÁLISIS DE EVALUACIÓN

En este apartado se detallan todos los aspectos relativos a la evaluación del alumnado con la presente unidad didáctica. Definiendo los criterios de evaluación a tener en cuenta, los instrumentos empleados para evaluar y el modelo a seguir.

Dicha evaluación debe atender a criterios objetivos siguiendo los estándares de aprendizaje que indica la normativa, pero no debemos olvidar que durante todo el proceso de enseñanza – aprendizaje existen también unos criterios subjetivos en función de cómo cada alumno va interiorizando conocimientos, madurando educativamente, esforzándose, motivándose, etc.

2.4.1. CRITERIOS

Para la definición de los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje de la unidad didáctica de Tiro Parabólico, se tendrán en cuenta aquellos que se

recogen en el Decreto 38/2015 de 22 mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Al tratarse de una unidad didáctica con un enfoque STEM, se aplicarán conjuntamente los criterios de la parte de física empleada y los de matemáticas. Así como, los estándares de aprendizaje evaluables en ambas materias.

MATEMÁTICAS - CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.

1. Expresar, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.
8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
9. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

10. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
11. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Dentro de este bloque cabe destacar aquellos criterios y estándares que se fomentarán con el uso del programa Geogebra:

- Análisis crítico de las soluciones y los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones.
- Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- Expresa, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
- Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
- Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
- Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

- Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
- Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
- Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 4. FUNCIONES.

1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales. *Con este criterio se pretende evaluar la capacidad para extraer conclusiones a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla.*

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES.

- Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
- Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.

- Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
- Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.

FÍSICA - CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 1. LA ACTIVIDAD CIENTÍFICA.

1. Reconocer que la investigación en ciencia es una labor colectiva e interdisciplinar en constante evolución e influida por el contexto económico y político
2. Comprobar la necesidad de usar vectores para la definición de determinadas magnitudes.
3. Comprender que no es posible realizar medidas sin cometer errores y distinguir entre error absoluto y relativo.
4. Realizar e interpretar representaciones gráficas de procesos físicos o químicos a partir de tablas de datos y de las leyes o principios involucrados.

Dentro de este bloque cabe destacar aquellos criterios y estándares que se fomentarán con el uso del programa Tracker:

- Diseña y describe experiencias realizables bien en el laboratorio o empleando aplicaciones virtuales interactivas, para determinar la variación de la posición y la velocidad de un cuerpo en función del tiempo y representa e interpreta los resultados obtenidos.
- Elaborar y defender un proyecto de investigación, aplicando las TIC.
- Elaborar e interpretar gráficas que relacionen las variables del movimiento partiendo de experiencias de laboratorio o de aplicaciones virtuales interactivas, y relacionar los resultados obtenidos con las ecuaciones matemáticas que vinculan estas variables.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL BLOQUE 4. EL MOVIMIENTO Y LAS FUERZAS

1. Justificar el carácter relativo del movimiento y la necesidad de un sistema de referencia y de vectores para describirlo adecuadamente, aplicando lo anterior a la representación de distintos tipos de desplazamiento.
2. Distinguir los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea justificando su necesidad según el tipo de movimiento.
3. Expresar correctamente las relaciones matemáticas que existen entre las magnitudes que definen los movimientos rectilíneos y circulares.
4. Resolver problemas de movimientos rectilíneos y circulares, utilizando una representación esquemática con las magnitudes vectoriales implicadas, expresando el resultado en las unidades del Sistema Internacional.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES

- Representa la trayectoria y los vectores de posición, desplazamiento, y velocidad en distintos tipos de movimiento, usando un sistema de referencia.
- Deduce las expresiones matemáticas que relacionan las distintas variables en los movimientos rectilíneo uniforme (M.R.U.), rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)
- Determina el valor de la velocidad y la aceleración a partir de gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo en movimientos rectilíneos.

2.4.2. INSTRUMENTOS

Para evaluar los criterios ya mencionados, utilizaremos básicamente tres instrumentos (aparte de la observación para valorar la actitud): el cuaderno de clase, la tarea realizada con las TIC y el examen.

El cuaderno de clase será específico de la materia y no deberá contener textos relativos a asuntos ajenos a las matemáticas. Se valorará el orden y el rigor, así como el esfuerzo y la actitud positiva hacia el aprendizaje. Si el alumno cumple estos requisitos, tendrá un cuaderno completo, con todos los contenidos y ejercicios

trabajados en clase, las tareas mandadas para casa hechas. El cuaderno se presentará de manera clara y de fácil comprensión. Este instrumento de evaluación forma parte de la evaluación continua del alumno.

En la tarea realizada con las TIC se estudiará también con qué soltura se manejan con la tecnología para ayudarse de herramientas, como la hoja de cálculo a la hora de resolver problemas. También será importante el esfuerzo y la capacidad de trabajo con sus compañeros. La claridad será, una vez más, un elemento importante a la hora de valorar esta tarea. Esta herramienta sirve para realizar parte de la evaluación continua.

Por último, en la última sesión de esta unidad didáctica, el alumnado se enfrentará a un examen en el que, sin poder consultar ningún tipo de libro ni otro material de referencia, deberá resolver una serie de problemas y ejercicios relacionados con las funciones. En este examen se evaluarán, principalmente, los estándares de aprendizaje evaluables que marca la LOMCE (Decreto 38/2015) a nivel general, y los que se marcan en el bloque de funciones de matemáticas y de movimiento en física. Al no recogerse explícitamente un bloque en la LOMCE sobre tiro parabólico, primará la coherencia en la evaluación, no pudiendo tener en cuenta un estándar de evaluación que no aparezca en el texto legal.

Este examen conforma la evaluación final, que tiene el mayor peso (70%) de todos los instrumentos con los que se valorará a los alumnos. De esta forma, se acostumbra a los alumnos a la realización de pruebas de evaluación, ya que a lo largo de su vida académica deberán enfrentarse a exámenes de este tipo.

2.4.3. MODELO DE EVALUACIÓN

4º Matemáticas Académicas: EXÁMEN TIRO PARABÓLICO

Apellidos, Nombre.....

Fecha.....

Ejercicio 1 – 1 ptos

Lanzamos una pelota con un ángulo de 60° respecto al suelo con una velocidad de 30 m/s . Calcular la altura máxima de la pelota y el alcance máximo.

Ejercicio 2 – 2 ptos

Un futbolista chuta un balón hacia la portería con una velocidad de 30m/s y un ángulo de 30° Calcular:

- a) Altura máxima
- b) El alcance
- c) Vector velocidad al llegar al suelo

Ejercicio 3 – 3 ptos

Representa los siguientes puntos en el plano, y dibuja la curva que representa de forma aproximada en el plano cartesiano.

X: 0, 2, 5, 8 Y: 0,5, 4, 9, 7

Suponiendo que la gráfica describe el tiro de un cañón desde una torre, señala en la gráfica, sin realizar ninguna operación, el punto aproximado de máxima altura, el punto donde impacta con el suelo.

Ejercicio 4 – 4 ptos

Lanzamos desde el suelo una pelota con un ángulo de 45° y queremos colarla en una cesta que está a 7 m de distancia horizontal y a 3,5 m de altura.

- a) Calcula con que velocidad hay que lanzarla.
- b) Representa su gráfica, calcula su dominio y recorrido.

3. DISEÑO DE LAS TAREAS O ACTIVIDADES A PRESENTAR AL ALUMNO

A continuación se exponen las tareas y actividades que se desarrollaran a lo largo de las sesiones.

3.1. SESIÓN 1. INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD.

En la primera sesión se proponen las siguientes actividades:

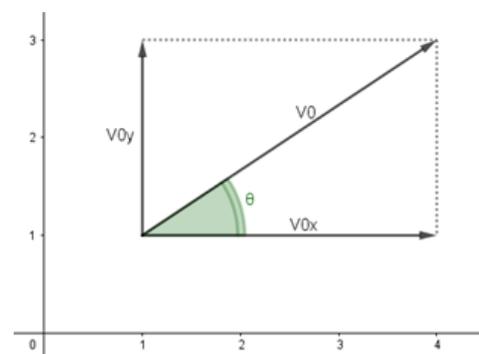
- Introducción de la unidad. Presentar brevemente la unidad y los objetivos esperados de la misma indicando las actividades a desarrollar. Exposición del trabajo en equipo que se ha de llevar a cabo (experimento).
- Concepto de tiro parabólico. Parámetros que intervienen en el mismo: velocidad inicial, ángulo de salida, gravedad.
- Presentación del video desarrollado.
- Explicación de los dos tipos de movimientos asociados al tiro parabólico (MRU y MRUA). Ecuaciones de dichos movimientos.

$$x = x_0 + v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

3.1.1. EJERCICIOS A REALIZAR.

1. Sabiendo que la velocidad inicial es $V_0=30$ m/s determinar las componentes horizontales y verticales de la misma para los siguientes ángulos de salida. Rellenar la tabla.



		V0x	V0y
Ángulo de salida	15°		
	30°		
	45°		
	60°		
	75°		

2. Calcular los valores de la velocidad inicial (V0) y del ángulo de salida para las siguientes componentes de la velocidad.

V0x (m/s)	V0y (m/s)	Ángulo	VO (m/s)
10	30		
25	10		
20	20		
0	25		
40	0		

3. Conocidas las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un sólido,

$x = x_0 + v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$ / $y = y_0 + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$, determinar los pares de coordenadas (x, y) para $t = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, \dots, 5\}$. Representar dichos puntos en una tabla y gráficamente en un sistema de ejes coordenados.

Datos: Puntos inicial (0,0); $V_0=5$ m/s; $\theta=60^\circ$.

t (seg)	x	y
0,0		
0,5		
1,0		
1,5		
2,0		
2,5		
3,0		
3,5		
4,0		
4,5		
5,0		

3.2. SESIÓN 2. TRAYECTORIA DEL TIRO PARABÓLICO.

En la segunda sesión se proponen las siguientes actividades:

- Repaso de las ecuaciones del MRU y MRUA.
- Obtención de la ecuación de la trayectoria del tiro parabólico. Combinación de las ecuaciones del MRU y MRUA.

$$y = y_0 + (\tan\theta) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} x^2$$

- Comparación de la ecuación de la trayectoria con la ecuación de la parábola. Coeficientes.

$$y = Ax^2 + Bx + C \text{ donde } A = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta} / B = \tan\theta / C = y_0$$

3.2.1. EJERCICIOS A REALIZAR.

1. Sabiendo que el punto de salida de un movimiento parabólico es (0,5), el ángulo de salida es de 60° y la velocidad inicial $V_0=25$ m/s, determinar la ecuación de la trayectoria de dicho movimiento. Dato: Gravedad(g)= 9.81 m/s².
 - a) Identificar entre las siguientes ecuaciones aquellas que definen un movimiento parabólico. Si alguna de ellas no representa un movimiento parabólico indicar el motivo.
 - b) $y = -x^2 + 4x + 1$
 - c) $y = -4x^2 + 2x - 3$
 - d) $y = x^2 + 5x + 2$
 - e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$
 - f) $y = 2x^2 + 3x$
 - g) $y = -x^2 - 5x - 2$
2. La ecuación de un movimiento parabólico es $y = -x^2 + 5x + 2$. Hallar los parámetros que definen dicho movimiento: V_0 y ángulo de salida. Dato: Gravedad(g)= 9.81 m/s².

3. Analizar la ecuación (f) del ejercicio 2, calculando los parámetros la definen. Explicar que la diferencia (desde un punto de vista físico) de la ecuación analizada en el ejercicio 3.

3.3. SESIÓN 3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA TRAYECTORIA. DETERMINACIÓN DEL ALCANCE, ALTURA MÁXIMA Y TIEMPO DE VUELO DEL CUERPO

En la tercera sesión se proponen las siguientes actividades:

- Repaso de la ecuación de la parábola y su relación con la ecuación del tiro parabólico.
- Determinación del alcance del tiro parabólico. El alcance es la longitud horizontal recorrida por el cuerpo, para su cálculo es necesario repasar la solución de las ecuaciones de segundo grado, es decir la coordenada x para $y=0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

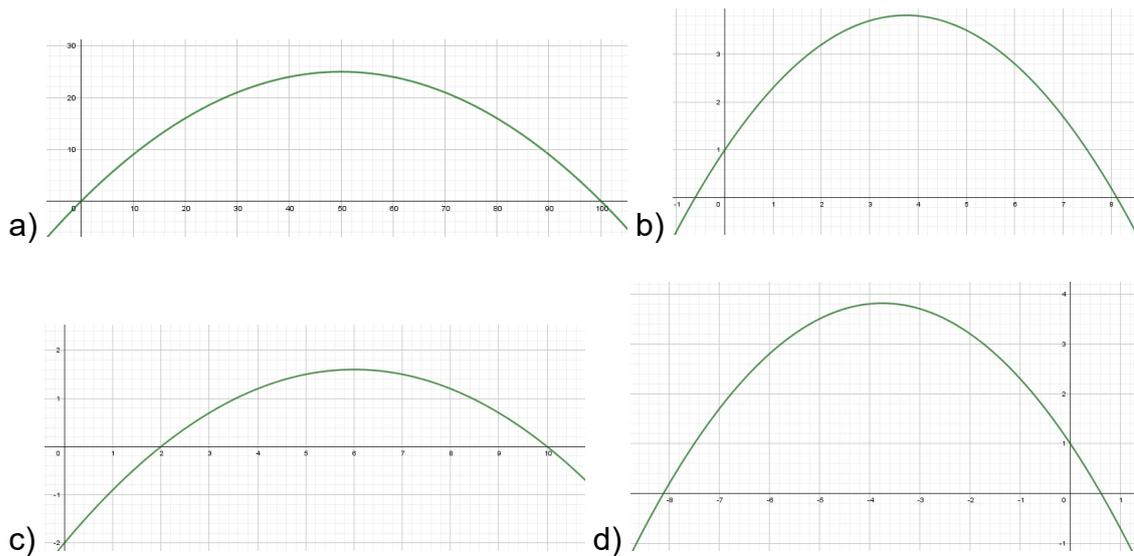
- Determinación de la altura máxima de la trayectoria. La altura máxima de la trayectoria es la posición y para el extremo relativo de la parábola, que en su caso es el vértice. Las ecuaciones que lo definen son:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

- Determinación del tiempo de vuelo. Uso de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.
- Representación gráfica de la parábola. Aplicación al tiro parabólico.

3.3.1. EJERCICIOS A REALIZAR

1. Determinar en las siguientes gráficas que representan trayectorias los siguientes elementos:
 - Punto de salida o lanzamiento.
 - Alcance.
 - Altura máxima de la trayectoria.
 - Ángulo de salida (aproximado).



2. Hallar el alcance, altura máxima, velocidad inicial y tiempo de vuelo de las siguientes trayectorias parabólicas:

a) $y = -x^2 + 4x + 1$

b) $y = -3x^2 + 2x$

c) $y = -x^2 + x + 1$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

e) $y = -2x^2 + 3x$

f) $y = -x^2 - 5x$

3. Representar gráficamente las trayectorias analizadas en el ejercicio 2.

3.4. SESIÓN 4. PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO. CLASE TIC SOBRE ANÁLISIS DE LA PARÁBOLA EN GEOGEBRA.

En la cuarta sesión se realizarán las siguientes actividades:

- Repaso general de los conceptos expuestos en las sesiones anteriores sobre el tiro parabólico.
- Presentación de la actividad práctica a realizar. Planteamiento del problema físico.

Se explica la preparación física de la actividad (tiro parabólico) y los elementos que son imprescindibles para su ejecución.

Es necesario el uso un plano inclinado que sirva como rampa para la actividad. De este plano es necesario conocer su inclinación o ángulo que forma con la horizontal, por lo que se plantearán diferentes estrategias para su medición: mediante medidor de ángulos, mediante el cálculo de la tangente (midiendo longitud y altura)...

Asimismo, es fundamental la elección del cuerpo o sólido que se utilizará, eligiendo un sólido en que su rozamiento con la superficie inclinada sea mínimo (o despreciable) para de esta manera no tener en cuenta su efecto en el movimiento. Por lo tanto, es recomendable que dichos objetos sean esféricos y de superficie lisa (pelotas, balones...) o contengan elementos que disminuyan la fricción (por ejemplo, coches u otro tipo de juguetes con ruedas).

Se formarán los grupos y se pedirá que en la siguiente sesión traigan los siguientes elementos:

- a) Elementos de medición: reglas, medidor de ángulos...
 - b) Sólido a analizar: pelotas, coches de miniatura, etc.
- Análisis y resolución de problemas de trayectorias parabólicas mediante el uso de Geogebra. Aula de informática.

Representación de ecuaciones parabólicas en Geogebra. Uso de deslizadores para ver la influencia de cada uno de los coeficientes de la parábola (A, B, C) en la trayectoria.

Calcular el punto de máxima altura de la trayectoria y el alcance (intersección con el eje x).

Representación de rectas tangentes a la parábola. Interpretación de las tangentes en los puntos de inicio (x_0, y_0) de la trayectoria (ángulo de salida) y en el punto de corte con el eje x (ángulo de impacto).

Representación de la trayectoria mediante sus ecuaciones paramétricas.

Calculo de la velocidad inicial y del tiempo de vuelo.

3.4.1. EJERCICIOS A REALIZAR.

1. Representar mediante Geogebra las siguientes trayectorias:

a) $y = -x^2 + 4x + 1$

b) $y = -4x^2 + 2x$

c) $y = -x^2 + x + 1$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

e) $y = -2x^2 + 3x$

f) $y = -x^2 - 5x$

Calcular para cada una de ellas los siguientes datos:

- Punto de salida o lanzamiento.
- Alcance.
- Altura máxima de la trayectoria.
- Ángulo de salida y de impacto.
- Velocidad inicial.
- Tiempo

2. Representar las siguientes trayectorias dadas de forma paramétrica:

a) $x = 5 + 30 \cdot \cos 45 \cdot t$ / $y = -5 + 30 \cdot \sen 45 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$

b) $x = 10 \cdot \cos 30 \cdot t$ / $y = 10 \cdot \sen 30 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$

c) $x = 20 \cdot \cos 60 \cdot t$ / $y = 25 - 20 \cdot \sen 60 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$

Datos: Gravedad (g)=9.81 m/s². t (seg.) = [0, 20]

3.5. SESIÓN 5. REALIZACIÓN DEL EXPERIMENTO.

La sesión 5 se dedicará completamente a la realización de los diferentes experimentos.

Elementos necesarios:

- Instrumento de grabación audiovisual (móvil o similar).
- Balanza de precisión.
- Herramientas de medida: reglas, medidores de ángulos...
- Cuerpo a lanzar: pelotas, coches de juguete, etc...

Los alumnos han de realizar tres tipos de experimentos, de esta manera se pueden comparar los diferentes resultados obtenidos:

1. Caída del sólido por la rampa y analizar la trayectoria que sigue una vez que abandone la rampa (rampa con inclinación negativa)

2. Impulso del sólido a través de la rampa (pendiente positiva) y análisis de su trayectoria
3. Lanzamiento manual del cuerpo en una dirección (sin rampa). Lo ideal sería que cada grupo realice experimentos diferentes y así poder comparar y analizar los resultados de cada uno de ellos.

Ejecución de los experimentos:

1. Realizar una medición del peso del objeto a estudiar, empleando una balanza de precisión.
2. Colocar la rampa inclinada (puede ser cualquier elemento plano: una mesa, un tablero, etc.). Realizar una medición del ángulo que forma con el plano horizontal.
3. Colocar el instrumento de grabación paralelo al experimento, haciendo uso de un soporte fijo para el mismo. Colocar también en la escena de un elemento físico del que se conozcan sus medidas para su utilización como referencia.
4. Grabar los experimentos.

3.6. SESIÓN 6. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL EXPERIMENTO.

Esta sesión se realizará en el aula de informática y se emplearán los siguientes softwares:

- TRACKER. Programa que permite el análisis de las trayectorias de cuerpos en movimiento.
- GEOGEBRA. Software matemático que se empleará para la comprobación de los datos obtenidos con TRACKER.

El proceso a seguir es el siguiente:

- Obtención de los datos.

El tratamiento de los datos obtenidos y su interpretación física se realizará mediante el uso del software TRACKER, de licencia libre. Mediante este

software se obtendrán los parámetros que definen el movimiento y la trayectoria del sólido empleado en el experimento.

Los procesos a seguir son los siguientes:

1. Importar el video en el software.
 2. Delimitar en el video la secuencia donde se visualiza el movimiento o experimento realizado.
 3. Definir el origen y los ejes cartesianos respecto de los que se obtendrán las coordenadas (x,y) del movimiento. Comando “Ejes”.
 4. Indicar, mediante el comando “Masa puntual”, el sólido o elemento a seguir, especificando su masa, previamente medida.
 5. Identificar el cuerpo o elemento usado como comparación, y asignarle su medida real mediante el comando “Barra de Calibración”.
 6. Mediante el comando “Trayectoria automática” o “Autotracker” se determina de manera automática la trayectoria que sigue el sólido a lo largo de todo el experimento, en la secuencia especificada. En el caso de que dicha trayectoria no sea detectada de manera automática se procederá a definirla de manera manual.
 7. Una vez obtenida la trayectoria, el software proporciona una tabla y gráficas con las coordenadas (x,y) y el tiempo (t) de cada uno de los puntos obtenidos en la identificación de la trayectoria del cuerpo.
- Tratamiento de los datos.

La siguiente fase del proceso consiste en el análisis y tratamiento de los datos obtenidos, que están en forma de una tabla con información de tiempo y coordenadas.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Seleccionar y copiar los datos a analizar de la tabla. Se toman las coordenadas (x,y) de los puntos obtenidos.
2. Abrir la ventana de análisis de datos (“Herramienta de Datos”) mediante el comando “analizar”. En esta ventana aparecen representados los

parámetros obtenidos en forma de gráfica. Si no aparecen los datos de la forma deseada, se copian de la tabla y se insertan en una ventana nueva, dentro de la “Herramienta de Datos”.

3. Para analizar los datos se hace uso del comando “Analyze-Ajustes”. Se elige el tipo de ajuste “parábola” y el programa proporciona el valor de los parámetros que definen la parábola (A, B, C) que mejor se ajusta a los datos obtenidos, proporcionando también el porcentaje de error.
 4. Si los datos están bien obtenidos se observa que el error o desviación es prácticamente despreciable y que la parábola obtenida se ajusta a los datos. Por lo tanto, se demuestra que la trayectoria que sigue el cuerpo es una trayectoria parabólica.
- Comprobación del resultado obtenido.

La última etapa del proceso consiste en la corroboración del resultado (ecuación de la parábola) mediante herramientas matemáticas. Es decir, sabiendo que la trayectoria de dicho movimiento es una trayectoria parabólica, se trata de comprobar mediante un software matemático (Geogebra) que los datos obtenidos (puntos x e y) forman parte de una parábola.

El objetivo de esta actividad es la comprobación mediante un procedimiento alternativo del resultado final. La realización de este doble análisis es necesario para dar validez al experimento, ya que proporciona la fiabilidad necesaria al utilizar una metodología alternativa y comprobar que el resultado obtenido estaba dentro de los parámetros esperados.

Los pasos de esta fase del análisis son los siguientes:

1. Copiar los datos de la tabla (Tracker) y llevarlos a Geogebra (vista Hoja de Cálculo). Importar dichos puntos en la vista gráfica (comando “Lista de puntos”).
2. Definir tres deslizadores (a, b, c) que serán los tres coeficientes de la ecuación de la parábola ($y=ax^2+bx+c$). Representar gráficamente dicha parábola.

Haciendo uso de los deslizadores, ajustar la parábola a los datos importados de Tracker. Los valores de los deslizadores que mejor se ajusten serán los parámetros que definen matemáticamente la parábola.

3.7. SESIÓN 7. PRESENTACIÓN LOS RESULTADOS.

En esta sesión los alumnos presentarán por grupos los resultados obtenidos en los experimentos y explicarán su significado. Se trata de una actividad no evaluable.

3.8. SESIÓN 8. REPASO DE LA UNIDAD.

La sesión 8 se dedicará inicialmente a repasar la unidad y resolución de las posibles dudas que se puedan presentar.

Los ejercicios a realizar serán ejercicios contextualizados, en los que se aplicará la teoría a ejemplos prácticos.

3.8.1. EJEMPLOS DE EJERCICIOS A REALIZAR

1. En un campo de golf un jugador golpea la pelota con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de golpeo de 30° . Se pide:
 - a) Ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota.
 - b) Ecuación parabólica de la trayectoria.
 - c) Alcance de la pelota y tiempo que está en el aire.
 - d) Altura máxima que alcanza la pelota.
 - e) Representar gráficamente dicho movimiento.
2. Debido a unas inundaciones un pueblo se ha quedado aislado. Para llevarles suministros se usarán helicópteros que les lanzarán paquetes con víveres. Sabiendo que el helicóptero va a una velocidad de 30 m/s y lanza los víveres a una altura de 80 metros, se pide:
 - a) Ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota.
 - b) Ecuación parabólica de la trayectoria.
 - c) Alcance de la pelota y tiempo que está en el aire.
 - d) Altura máxima que alcanza la pelota.

e) Representar gráficamente dicho movimiento.

Nota: este tipo de ejercicios se llaman de tiro horizontal, ya que $V_{0y} = 0$. Representan un tiro parabólico que empieza en la mitad, en el punto de máxima altura.

3. Desde lo alto de un edificio de 50 metros de altura se golpea un balón de fútbol y este tarda 5 segundos en llegar al suelo a una distancia de 100 metros del punto de lanzamiento. Se pide:
- a) Calcular la velocidad inicial y el ángulo de salida de la trayectoria.
 - b) Ecuación parabólica de la trayectoria.
 - c) Alcance de la pelota y tiempo que está en el aire.
 - d) Altura máxima que alcanza la pelota.
 - e) Representar gráficamente dicho

3.9. SESIÓN 9. EXAMEN.

La última sesión se dedica a la realización de una prueba evaluable.

4. REFERENCIAS

Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Rodríguez Amador, Ruben. (2015). Enseñanza para la comprensión: dificultades que afrontan los estudiantes en el aprendizaje del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).