

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

M1113

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

---

**Unidad didáctica - 4º ESO**  
**Tiro parabólico**

---

*Alumnos:*

José María Mier Gómez

Andrés Renedo Llano

Daniel Sebastián San Martín

*Profesor:*

Óscar Arcera López

17 de marzo de 2019





# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Análisis Didáctico</b>	<b>8</b>
2.1. Análisis de Contenido . . . . .	8
2.1.1. Conocimiento Conceptual . . . . .	8
2.1.2. Conocimiento Procedimental . . . . .	19
2.1.3. Sistemas de Representación . . . . .	20
2.1.4. Fenomenología . . . . .	21
2.2. Análisis Cognitivo . . . . .	22
2.2.1. Competencias . . . . .	22
2.2.2. Habilidades . . . . .	23
2.2.3. Dificultades y Errores . . . . .	24
2.3. Análisis de Instrucción . . . . .	27
2.3.1. Planteamiento general de las sesiones . . . . .	27
2.3.2. Papel y agrupamiento de los estudiantes . . . . .	29
2.3.3. Papel del profesor . . . . .	29
2.4. Análisis de Evaluación . . . . .	31
2.4.1. Criterios de evaluación . . . . .	32
2.4.2. Instrumentos de evaluación . . . . .	38
2.4.3. Modelo de evaluación . . . . .	39
<b>3. Diseño de tareas o actividades a presentar al alumno</b>	<b>41</b>



Las matemáticas están en todo,  
pero lo importante se decide con  
el corazón.

---

Carlos Beltán Álvarez



# 1. Introducción

Se desarrolla en esta unidad didáctica la vertebración de contenidos y la programación de actividades y tareas de la unidad didáctica correspondiente al *Tiro Parabólico*. Estos contenidos servirán como guía docente del departamento de matemáticas en la impartición de la asignatura.

Se encuadra esta unidad dentro de la programación didáctica dirigida al alumnado de 4º de la ESO, en concreto a contenidos enclavados dentro del aprendizaje de las matemáticas académicas.

## Justificación

El carácter propedéutico que caracteriza a las matemáticas académicas, como preparación de un futuro académico de las diferentes disciplinas del bachillerato, determina que se considere la presentación y el aprendizaje de esta unidad didáctica desde una perspectiva STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas): la enseñanza-aprendizaje de estas disciplinas de manera integrada en lugar de como áreas de conocimiento compartimentadas. Esta integración se entiende en cualquier caso cuando hay una asimilación explícita de conceptos de dos o más disciplinas.

## Contexto

### Contexto curricular

Cabe recordar que en el Congreso de la Unesco en Bucarest (1968), se subrayó como objetivo de la educación el desarrollo de la inteligencia de los jóvenes. El alumnado como factor clave. En el congreso:

- Se realizó un análisis de los problemas de la enseñanza de las matemáticas.
- Se hizo hincapié en el papel destacado de las matemáticas y se puso de relieve su utilidad en el desarrollo de la tecnología industrial.
- Se fomentaba su sistematización y desarrollo.

A partir de ahí las diferentes leyes educativas en España han sufrido una evolución, influidas en mayor o menor medida por las corrientes de pensamiento internacionales.

Así los objetivos de la LGE (1970), Ley general de Educación, para facilitar la creación de estructuras mentales, introdujo la Matemática Moderna desde la primera etapa. En este hecho podemos ver la “sombra” del constructivismo. Se concedió gran importancia al estudio de conjuntos y estructuras algebraicas, que se consideraron como un fin en sí mismos.

Tras otras leyes, finalmente la llegada de la LOMCE (2013), Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, destacaba como objetivo principal la profundización en el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático. Y obviando otros detalles deberíamos destacar competencias como:

- *Competencia matemática: Uso del razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir el contexto.*
- *Competencia en Ciencia y Tecnología: Acercamiento al mundo físico a través de modelos matemáticos.*
- *Competencia en comunicación lingüística: Expresar de manera adecuada y precisa los razonamientos matemáticos (formal y verbalmente).*
- *Competencia Digital: Uso de las TIC.*
- *Aprender a aprender: Autonomía, perseverancia, sistematización y crítica.*
- *Competencias sociales y cívicas: Uso de estrategias de cálculo y resolución de problemas para aceptar otros puntos de vista.*
- *Sentido, iniciativa y espíritu emprendedor: Estrategias de resolución de problemas.*
- *Conciencia y expresiones culturales: Contribución de las matemáticas al desarrollo cultural de la sociedad.*



Lo descrito anteriormente define cómo ha evolucionado el enfoque académico y cómo la han hecho igualmente las exigencias competenciales. En la actualidad se muestra como objetivo acercar las matemáticas a la realidad cotidiana y a que el alumno advierta su aplicación práctica. Asimismo se ponen de relieve las estrategias de cálculo y la capacidad resolutoria de problemas.

El Decreto 38/2015, de 22 de mayo que establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, enmarca los objetivos y exigencias con los que se debe construir esta unidad didáctica. Entre ellos, destaca:

*f ) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*

### **Contexto Académico**

Esta unidad didáctica se enclava dentro de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas dentro del curso de 4º de la ESO.

Con el fin de cumplir con los objetivos que determina el currículum, pero con la intención clara de establecer un conocimiento transversal, carácter propedéutico de la asignatura, y en sintonía con el enfoque STEM que se pretende, se considera oportuno impartir esta unidad didáctica al final del curso.

Esto nos permitirá responder a los objetivos transversales que establece el bloque 1, donde destacan los procesos básicos e imprescindibles del quehacer matemático como son:

- La resolución de problemas.
- La matematización y modelación.
- Las actitudes adecuadas para resolver el trabajo científico.
- La utilización de los medios tecnológicos.

En referencia a este último punto, se pretende asimismo complementar el contenido de la unidad didáctica con una práctica de laboratorio en la que se utilizarán además de herramientas de video análisis y modelización (programa “Tracker”), herramientas de geometría dinámica (Geogebra) y herramientas de visualización y tratamiento de datos (Excel).

Cabe destacar que todas estas acciones redundan en la adquisición de competencias, ya sea en Ciencia y Tecnología como en la relacionada con el mundo digital (uso de las TIC).

### **Contexto socioeconómico**

La práctica educativa queda enclavada en el IES Valle del Saja, ubicado en la localidad de Cabezón de la Sal, perteneciente al municipio del mismo nombre.

Cabezón de la Sal materializa la cabecera de la comarca Saja-Nansa, unidad supramunicipal con una población aproximada de 15.000 habitantes, a la que la localidad aporta unos 5.000 habitantes.

Caben destacar dos detalles que marcan la singularidad del municipio. Por un lado ser una localidad donde se han explotado yacimientos de sal, cuyo modo de explotación determinó que haya áreas del municipio con peligro de subsidencia. Por otro, el hecho político, en 1979 la villa reclamó la autonomía de Cantabria, siendo el primer ayuntamiento de la entonces provincia de Santander que lo pidiera y al que más tarde se le unieron la inmensa mayoría de consistorios cántabros, hecho que desembocó en la consecución de la categoría de Autonomía.

La localidad presenta una estratégica situación geográfica. El aumento de su población viene determinada por la importancia del sector servicios y a su tradición industrial textil, fabricación de mobiliario y cerámica (materiales de construcción). El sector primario es prácticamente nulo, aunque permanecen los usos de pastos de la Mancomunidad Campoo-Cabuérniga. La ganadería para la producción de leche mantiene cierta presencia.

El IES Valle del Saja es uno de los 2 institutos con los que cuenta la localidad. Presenta cuatro líneas en la etapa de ESO y otras cuatro en la de Bachillerato. No cuenta con Formación Profesional.

El Proyecto educativo de Centro (PEC) está enfocado al fomento de educación en valores y a la atención a la diversidad (AD) como así lo recoge su página Web.

El centro cuenta con dos programas bilingües (inglés y francés), con dos asignaturas por curso en cada uno de estos idiomas. Varias decenas de alumnos cursan simultáneamente ambos programas.

Es uno de los centros de Cantabria en los que se desarrolla, en colaboración con la Fundación Marcelino Botín, el programa *Global Classrooms*.

Además de tres salas de informática, el centro dispone en todas las aulas de un ordenador con conexión a Internet, pantalla, cañón de proyección y equipo de sonido, que permite el uso de la TIC en el aula.

En este contexto, algunos de sus alumnos han alcanzado, coordinados por el Departamento de Física y Química, el segundo y tercer premio en la fase nacional del Certamen de Jóvenes Investigadores, midiéndose con estudiantes de toda España (algunos ya universitarios) en el más prestigioso encuentro de este tipo.

Al ser un IES pequeño, su población determina que el número de alumnos en determinadas asignaturas optativas no sea excesivo, lo que permite la puesta en marcha de iniciativas que fomentan la participación del alumnado.

Destacaremos su vertiente solidaria, al organizar actividades para recaudar fondos con los que financiar los estudios de diferentes alumnos en un orfanato de Nepal.



## 2. Análisis Didáctico

En esta sección, realizaremos el análisis didáctico. Se trata de un proceso de planificación para la elaboración de la unidad didáctica, se compone de tres partes: análisis de contenido (2.1), análisis cognitivo (2.2) y análisis de instrucción (2.4).

### 2.1. Análisis de Contenido

En esta subsección, se recoge el análisis de contenido. Es una técnica que permite al profesor, en este caso de matemáticas, identificar, organizar y escoger los términos, la notación y los procedimientos para su enseñanza entorno a cuatro pilares fundamentales: conocimiento conceptual (2.1.1), conocimiento procedimental (2.1.2), sistemas de representación (2.1.3) y fenomenología (2.1.4).

#### 2.1.1. Conocimiento Conceptual

En este apartado, identificaremos los términos matemáticos que se van a trabajar con el alumnado. En este caso, al tratarse de una unidad didáctica del ámbito STEM, es necesario incluir terminología del ámbito de la física. Nótese, que esta unidad didáctica incluye contenidos de todos los bloques temáticos (Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, Bloque 2: Números y Álgebra, Bloque 3: Geometría, Bloque 4: Funciones, Bloque 5: Estadística y probabilidad) que aparecen en las Matemáticas Académicas de 4º de la ESO.

En el ámbito de las matemáticas, en esta unidad didáctica trataremos los siguientes puntos de una forma global: ecuaciones de 2º grado, representación gráfica de funciones, funciones trigonométricas y medidas de centralización y función. En los siguientes párrafos iremos detallando cada uno de los puntos anteriores.

Por otro lado, enclavamos la unidad didáctica dentro de la disciplina de la cinemática: rama de la mecánica que trata del movimiento en sus condiciones espacio temporales, sin atender a las causas que lo producen. Pese a que en la práctica de laboratorio se incluye la masa, se desprecian factores como la geometría del cuerpo, resistencia del aire, viscosidad, etc.

Dividiremos nuestra exposición acerca del conocimiento conceptual en tres subapartados. En el primer de ellos, hablaremos de los hechos, es decir, de los términos, nociones y convenios que emplearemos en nuestra unidad didáctica, mientras que en el segundo de los subapartados, expondremos los conceptos, esto es, las regularidades o relaciones entre los hechos indicados en el primer subapartado. En el tercer y último subapartado, expondremos un mapa conceptual de la unidad didáctica.

### Hechos

Comenzaremos con las ecuaciones de 2º grado. En este caso, los términos que vamos a manejar son: **expresión algebraica, monomio, variable, incógnita, polinomio univariado, ecuación cuadrática univariada, coeficiente, coeficiente director, polinomio univariado, término independiente, grado y raíz**. Cabe destacar, que gran parte este contenido aparece en el currículum de Matemáticas Académicas de 3º ESO (pág. 3253 del BOC), sin embargo, será necesario repasarlo para abordar con éxito la unidad didáctica actual.

Una **expresión algebraica** permite traducir expresiones de la vida cotidiana al lenguaje algebraico, usado para ello, una combinación de **coeficientes** y **variables** o **incógnitas**. Un monomio es una expresión algebraica donde solamente hay productos entre sus variables y exponenciación (**parte literal**), y producto con un coeficiente. El grado de un monomio es la suma de los exponentes de sus variables.

Un polinomio es la suma de dos o más monomios con parte literal distinta. El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios. Entre los coeficientes, cabe destacar el que acompaña a la variable de mayor grado, al cual denominaremos **coeficiente director**, y el coeficiente que no acompaña a ninguna variable (o a la variable de grado 0), al que llamaremos **término independiente**. Por ejemplo, la expresión algebraica  $32x^3 + 4xyz + 3$ , tiene como coeficientes los valores 32, 4 y 3, donde 32 es el coeficiente director y 3 es el término independiente, y tiene como variables  $x, y, z$ .

Un **polinomio univariado** es un polinomio que tiene una única variable. Una **ecuación cuadrática univariada** (en adelante, ecuación de 2º grado) es un polinomio univariado cuyo coeficiente director acompaña a una variable de grado 2.

Las **raíces** de un polinomio son el conjunto de valores de las variables que lo anulan. Por ejemplo, si tenemos el polinomio  $x - 2$ , el número 2 es raíz.

En cuanto a la notación, usaremos  $P(x_1, \dots, x_n)$  para designar a un polinomio con variables  $(x_1, \dots, x_n)$ . Naturalmente, usaremos  $P(x)$  para referirnos a un polinomio univariado con variable  $x$ . Usaremos la simbología  $(x, -, \cdot, /, =)$  habitual acompañada de paréntesis, corchetes y llaves para indicar la precedencia en la jerarquía de operaciones.

El siguiente ámbito que trataremos es la representación gráfica de funciones, además introduciremos a los estudiantes en el estudio del crecimiento de funciones y a encontrar los extremos de las mismas (Matemáticas Académicas 4º ESO, Bloque 2: Números y Álgebra, BOC, pág 3263). En este caso, los términos con los que vamos a trabajar son: **función, variable dependiente, variable independiente, coordenadas, ejes cartesianos, gráfica, dominio, imagen, parábola, abcisa, ordenada, creciente, decreciente, máximo, mínimo, continuidad, discontinuidad.**

En este contexto, trataremos únicamente funciones que tienen una variable independiente y una variable dependiente. Por lo tanto, diremos que una **función** es una relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la primera variable (**variable independiente**) le corresponde un único valor de la segunda (**variable dependiente**). Generalmente en la literatura, se denota por  $x$  a la variable independiente y por  $y$  a la variable dependiente.

El comportamiento de una función puede estudiarse de forma **gráfica** si la representamos sobre los ejes cartesianos. Cada punto de la función presenta dos coordenadas, su **abcisa**  $x$  y su **ordenada**  $y$ . Dada una función, llamaremos **dominio** a todos los valores que puede tomar la primera variable  $x$  e **imagen** a todos los valores que toma la segunda variable  $y$ . La construcción de una gráfica es sencilla si conocemos la expresión algebraica de la función, basta evaluar la expresión algebraica en unos cuantos puntos y a continuación representar esos puntos gráficamente, al unir esos puntos (de formas más o menos exóticas) obtenemos una aproximación de la función. La motivación de emplear representación gráfica de funciones es el estudio de ciertas propiedades que pueden deducirse intuitivamente a partir de la gráfica.

Uno de los aspectos más destacables del estudio de funciones es el estudio su crecimiento y su decrecimiento. Una función es **creciente** si a medida que se aumenta el valor de  $x$  aumenta el valor de  $y$  y es **decreciente** cuando al aumentar  $x$  disminuye  $y$ , esto es inmediato de ver si disponemos de la representación gráfica de la función. Las funciones no tienen necesariamente que ser crecientes o decrecientes en todo su dominio, el crecimiento y el decrecimiento de las funciones se puede estudiar de forma local. También, tenemos funciones que no son crecientes ni decrecientes, como las funciones constantes.

Decimos que una función tiene un **máximo** relativo en el punto  $x'$ , si el valor de la función en ese punto es mayor o igual que el valor de la función en los puntos de un entorno de  $x'$ . Por otro lado, decimos que una función tiene un **mínimo** relativo en el punto  $x'$ , si el valor de la función en ese punto es menor o igual que el valor de la función en los puntos de un entorno de  $x'$ . Cambiaremos relativo por absoluto cuando lo anterior se cumpla para todo el dominio y no solamente para un entorno. Es sencillo conocer los máximos y mínimos de una función si disponemos de su gráfica.

Otro aspecto interesante de las funciones es el estudio de la **continuidad**. Diremos, intuitivamente, que una función es continua si pequeñas variaciones en el dominio producen pequeñas variaciones en la imagen. Si suponemos que nuestra función está definida en  $\mathbb{R}$ , podemos decir que la función es continua si y sólo puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, diremos que la función es **discontinua**.

Para denotar a las funciones usaremos letras minúsculas acompañadas de las variables (también letras minúsculas):  $f(x), g(x, y), \dots$

El siguiente ámbito que vamos a tratar es la geometría, sobre todo el estudio del concepto de vector y las razones trigonométricas (Matemáticas Académicas 4º ESO, Bloque 3: Geometría, BOC, pág 3262). Los términos que vamos a emplear son: **punto del plano, recta, semirrecta, segmento, plano, ángulo, triángulo (rectángulo), cateto opuesto, cateto contiguo, hipotenusa, seno, coseno, tangente, vector (dirección, sentido, módulo, coordenadas)**.

Un **punto** en el plano es un par  $(x, y)$ , donde  $x$  es la posición “horizontal” e  $y$  la posición “vertical” en los ejes cartesianos. Una **recta** es una línea que



pasa por dos puntos prolongada indefinidamente (la dirección de la recta indica en que orden pasa por los puntos que la definen). Una **semirrecta** es una línea que pasa por dos puntos y que se prolonga indefinidamente únicamente en un sentido (tiene un comienzo, llamado punto origen). Un **segmento** es un subconjunto finito de puntos consecutivos de una recta. Un **plano** es una superficie bidimensional plana sin grosor, que contiene puntos y rectas. Un **ángulo** es la parte del plano determinada por dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen. Un **triángulo** es una figura poligonal cerrada de tres lados.

En cuanto a la notación, para puntos usaremos letras mayúsculas ( $A, B, C, \dots$ ) o pares ordenados de letras minúsculas ( $(x, y)$ ), para rectas, semirrectas y segmentos letras minúsculas ( $r, s, t, \dots$ ) y tanto para los ángulos como para los planos letras griegas ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ).

Por otro lado, tenemos que un **vector** (bidimensional) es un segmento orientado determinado por dos puntos,  $A$  y  $B$  y el orden de estos. El punto inicial se denomina origen y el segundo extremo, usaremos la notación  $\overrightarrow{AB}$ . Un vector tiene los siguientes elementos: dirección, sentido, módulo y coordenadas. La **dirección** es la de la recta sobre la que se encuentra. El **sentido** es el orden en el que se recorre el segmento  $AB$ , es decir, como se fija el origen y el extremo. Las **componentes o coordenadas** de un vector son las coordenadas del punto extremo  $B = (b_1, b_2)$  menos las coordenadas del punto origen  $A = (a_1, a_2)$  :

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

El **módulo** de un vector es la longitud del segmento que une los puntos  $A$  y  $B$ . Si las componentes del vector son  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , su módulo es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Los últimos aspectos matemáticos que vamos a incluir son las medidas de centralización y de dispersión de datos (Matemáticas Académicas 4º ESO, Bloque 5: Estadística, BOC, pág 3264). Esto es necesario para el tratamiento de datos y la estimación de errores cuando se realice la parte experimental de la unidad didáctica. Los términos que vamos a emplear son: **población, muestra, estadística descriptiva, estadística inferencial, media, mediana, moda, varianza y desviación típica.**

La **población** es el conjunto de datos sobre el que estamos interesados obtener conclusiones. La **muestra** es el subconjunto de la población al que tenemos acceso y sobre el que realizaremos mediciones (debe ser representativo de la población).

La **estadística descriptiva** es un conjunto de técnicas y métodos que son empleados para recolectar, organizar y presentar en forma de tabla o gráfica información numérica. Por otra parte, **inferencia estadística** es un conjunto de técnicas y métodos que son usados para obtener conclusiones generales acerca de una población usando datos de una muestra.

Por último, mostraremos la terminología del ámbito de la física que necesitaremos emplear en esta unidad didáctica. Se trata de un colección sucinta de términos: **notación científica, movimiento, sistema de referencia, distancia, trayectoria, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza e interacción**. Estos contenidos se incluyen en el currículum de Física y Química de 4ºESO (la parte de Notación Científica aparece en el Bloque 1: La actividad Científica en la pág. 2899 del BOC y la parte referente a movimiento y fuerzas aparece en el Bloque 4: El movimiento y las fuerzas en la pág. 2904 del BOC).

Para llevar a cabo cualquier actividad científica, debe existir un consenso para expresar magnitudes arbitrariamente grandes o pequeñas, en nuestro caso emplearemos **notación científica**, que consiste en reescribir las cantidades de forma que el resultado sea un número entre 0 y 10 multiplicado por una potencia de 10.

Ahora, definiremos los términos relacionados con el movimiento y las fuerzas. En primer lugar, decimos que un cuerpo se **mueve** cuando cambia de posición respecto a un **sistema de referencia** que se considera fijo. Existen tres características fundamentales de un movimiento:

1. **Posición:** lugar que el cuerpo ocupa en el espacio respecto a un sistema de referencia. La posición inicial del cuerpo se conoce como punto de origen.
2. **Trayectoria:** es la función que describe un cuerpo en su movimiento.
3. **Distancia:** es la longitud que recorre un cuerpo móvil de una posición a otra.

4. **Tiempo**: lo que tarda el cuerpo en recorrer una distancia.

Por otro lado, una **fuerza** es toda causa capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo o de producir en él una deformación. La fuerza es una magnitud vectorial, típicamente se representa por una flecha (vector) y para trabajar con ella, necesitamos conocer su módulo, dirección, sentido y sus coordenadas. Una **interacción** entre dos cuerpos siempre produce dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas una en cada objeto. Usualmente denotaremos a las fuerzas usando letras mayúsculas:  $F, F_x, F_y, \dots$

### Conceptos

En este subapartado, estableceremos relaciones entre los hechos (conceptos) que hemos señalado en el subapartado anterior. Se relacionarán los hechos pertenecientes a un mismo ámbito así como relaciones entre hechos de diferentes ámbitos que ayudarán a una mejor comprensión de la unidad didáctica.

Comenzaremos con los polinomios. En este caso, los conceptos que trabajaremos serán las operaciones con polinomios univariados (Matemáticas Académicas 4º ESO, Bloque 2: Números y Álgebra, BOC, pág 3261). Un polinomio univariado es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 0, a_n \neq 0$$

Sean  $P(x), Q(x)$  y  $R(x)$  polinomios. Algunas de las propiedades de la suma (y resta) de polinomios son:

1. Asociativa:  $(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x))$
2. Conmutativa (abeliana):  $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
3. Elemento neutro:  $P(x) + 0 = 0 + P(x) = P(x)$
4. Inverso:  $P(x) + (-P(x)) = 0$

Algunas propiedades del producto de polinomios son:

1. Asociativa:  $(P(x) \cdot Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot (Q(x) \cdot R(x))$
2. Conmutativa:  $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

3. Elemento neutro:  $1 \cdot P(x) = P(x) \cdot 1 = P(x)$

Una propiedad que relaciona el producto y la suma de polinomios es la propiedad distributiva:

$$P(x) \cdot (Q(x) + R(x)) = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

En el ámbito de las funciones, es necesario establecer el concepto de **parábola**. Una parábola no es más que la gráfica de una ecuación de segundo grado, es decir, una expresión de la forma

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Este va a ser el objeto central de la unidad didáctica. Los conceptos más importantes en este caso, son las relaciones que existen entre las distintas propiedades de la función (continuidad, crecimiento, extremos, ...) y de su representación gráfica.

En el ámbito de la geometría, vamos a introducir varias relaciones entre los términos descritos en el subapartado previo. En primer lugar, decimos que un **triángulo** es **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto ( $90^\circ$ ). Si tomamos uno de los ángulos en un triángulo rectángulo, podemos definir el **cateto opuesto** como el lado del triángulo opuesto al ángulo, la **hipotenusa** como el lado opuesto al ángulo recto y el **cateto contiguo** como el lado restante. De nuevo, para un ángulo  $\alpha$  de un triángulo rectángulo, definimos el seno, el coseno y la tangente de ese ángulo como

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

respectivamente.

A continuación, expondremos algunas relaciones entre vectores, puntos y ángulos ( $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  vectores,  $A, B$  puntos):

1. Suma de vectores:  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

2. Resta de vectores:  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

3. Multiplicación por un escalar:  $k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$ .
4. Suma de un punto y un vector:  $A + \vec{u} = (a_1, a_2) + (u_1, u_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2) = (b_1, b_2) = B$
5. Ángulo ( $\alpha$ ) entre dos vectores:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

En cuanto a la parte de estadística y probabilidad, podemos establecer ciertas relaciones entre los datos que aparecen en una muestra. Dada una muestra  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $n$  elementos de una población, definimos (respecto a la muestra):

- Moda: valor que aparece con mayor frecuencia en la muestra.
- Media:  $\frac{\sum_{x \in X} x}{n}$  (Medida de centralización).
- Mediana: representa el valor del elemento central de la lista ordenada de elementos (Medida de centralización).
- Varianza:  $\frac{1}{n} \sum_{x \in X} (x - \sum_{x \in X} x)^2$  - Indica la distancia de los datos a su media (Medida de dispersión).
- Desviación típica:  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{x \in X} (x - \sum_{x \in X} x)^2}$  Indica la distancia de los datos a su media (Medida de dispersión).

Respecto a los contenidos del ámbito de la física de la unidad didáctica, podemos relacionar algunos hechos para obtener relaciones interesantes en el ámbito del movimiento. La **velocidad** es la relación entre la distancia recorrida por un cuerpo móvil y el tiempo que ha empleado para recorrerla. Dicho de otra forma, la velocidad es la distancia que recorre un cuerpo móvil por unidad de tiempo.

La **aceleración** es la variación de la velocidad en un instante de tiempo. Si la velocidad aumenta, decimos que se ha producido un aceleración positiva, sin embargo, si la velocidad disminuye, diremos que se ha producido una aceleración negativa.

En cuanto a las fuerzas, resulta útil para resolver muchos problemas descomponer una fuerza en otras dos en la dirección de los ejes de coordenadas, cuyos efectos sumados sean iguales a la propia fuerza. Aplicando la definición de seno al ángulo  $\alpha$  que forma el vector con el eje  $x$  (en un triángulo

rectángulo el seno es el cateto opuesto al ángulo dividido por la hipotenusa) y de coseno, podemos calcular las componentes:

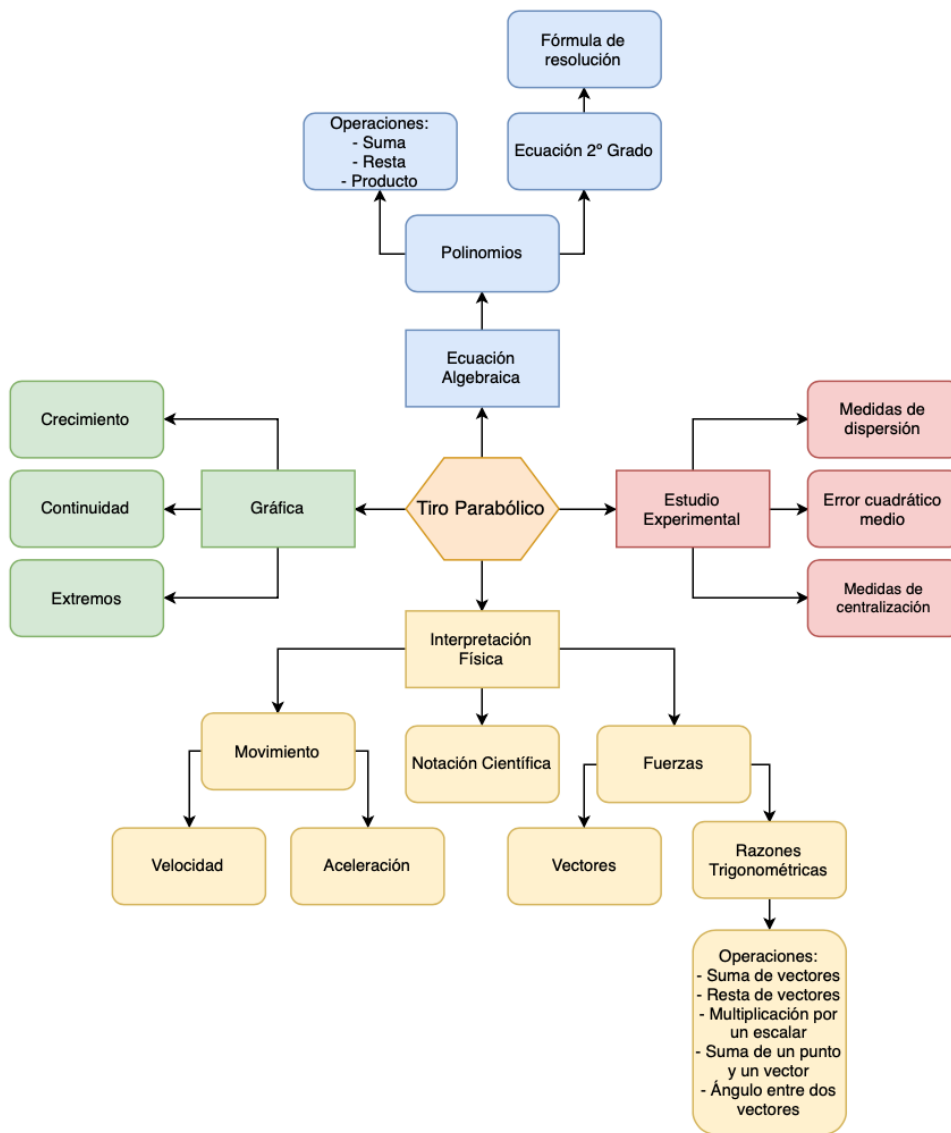
$$F_x = F \cdot \cos(\alpha), F_y = F \cdot \sin(\alpha)$$

Conocidas las componentes de  $F$  sobre los ejes, no sólo conocemos la orientación (el ángulo con el eje  $x$  define su dirección), sino que podemos hallar su módulo a partir del Teorema de Pitágoras.

Por otro lado, también podemos sumar fuerzas. Si las fuerzas tienen la misma dirección se suman sus módulos sin más (o se restan si su sentido es opuesto), la fuerza resultante representa el efecto combinado de todas las fuerzas y tiene su misma dirección. Si las fuerzas tienen diferentes direcciones, se sustituyen por sus proyecciones en los ejes. A continuación, se suman las componentes del mismo sentido y se restan las de sentido opuesto. Finalmente sólo queda una resultante en el eje  $x$  y otra en el eje  $y$ , que se componen aplicando el Teorema de Pitágoras: la hipotenusa da la dirección y el módulo es la fuerza total resultante.

## Estructura

A continuación, se muestra el mapa conceptual de la unidad didáctica, en el cual se establecen las conexiones y las relaciones entre los términos que se incluyen en esta unidad:



**Figura 1:** Mapa Conceptual de los contenidos de la Unidad Didáctica

### 2.1.2. Conocimiento Procedimental

En este apartado, incluiremos las **destrezas, algoritmos y estrategias** que los alumnos deben conocer. En el caso de los polinomios, los estudiantes han de conocer los métodos de suma (y resta) y multiplicación de polinomios. Por otra parte, dado que el núcleo de nuestra unidad didáctica gira entorno a la ecuación de 2º grado, los estudiantes han de conocer el algoritmo de resolución de este tipo de ecuaciones, que viene dado por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ para } a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, a \neq 0$$

En el caso de las funciones, los alumnos deben ser capaces de representarlas, y así disponer de una herramienta a través de la cual pueden estudiar de forma intuitiva sus propiedades (continuidad, crecimiento, extremos, ...).

En cuanto a la parte de la geometría, los estudiantes deben ser capaces de calcular las razones trigonométricas de los ángulos más comunes utilizando tablas. Por otro lado, deben ser capaces de medir ángulos. Respecto a la parte vectorial, los estudiantes deben ser capaces de realizar las operaciones de suma, resta y producto por escalar de vectores, así como conocer su interpretación geométrica.

En relación a la parte de estadística y probabilidad, los estudiantes deben ser capaces de calcular las medidas de dispersión y de centralización así como interpretarlas para obtener conclusiones sobre los datos obtenidos.

En cuanto a la parte física, los alumnos deben ser capaces de escribir correctamente números en notación científica, de realizar correctamente operaciones con números escritos en notación científica y de ser capaces enfrentarse a problemas de la vida cotidiana usando este tipo de notación siempre que sea adecuado.

Por otro lado, los estudiantes han de conocer la fórmula para calcular la velocidad media de un móvil dada la distancia recorrida y el tiempo empleado para recorrerla:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo utilizado para recorrerla}}$$



Además, los estudiantes han de conocer la fórmula para calcular la aceleración dada la variación de velocidad y el tiempo en el que se ha producido esta variación:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Variación de la velocidad}}{\text{Tiempo empleado}}$$

Por último, los estudiantes deben ser capaces de descomponer una fuerza en sus proyecciones sobre los ejes del sistema de referencia y de sumar fuerzas, además, han de comprender el significado físico de las operaciones previas.

### 2.1.3. Sistemas de Representación

Los sistemas de representación son conjuntos de símbolos, signos y gráficos que nos permiten representar objetos, conceptos o ideas. Su interés radica, en que un mismo objeto, concepto o idea puede ser representado por diferentes sistemas, proporcionando, por consiguiente, distintos puntos de vista sobre un mismo ente. En nuestro caso, usaremos cuatro sistemas de representación:

1. **Gráfico.** El sistema de representación gráfico resulta fundamental para el estudio gráfico de funciones, para la representación de magnitudes vectoriales y para plasmar las relaciones de centralización y de dispersión que existen entre conjuntos de datos.
2. **Simbólico.** El sistema de representación simbólico usa símbolos para representar elementos, propiedades y relaciones, aplicando en cada caso, la notación adecuada. El lenguaje algebraico nos permite representar funciones, así como el resto de objetos con los que vamos a trabajar. Ejemplo:  $f(x) = x^2$ ,  $\text{sen}(\alpha)$ ,  $A$ ,  $\gamma$ ,  $\dots$
3. **Numérico.** El sistema de representación numérico da valores concretos a las expresiones del sistema de representación simbólico. Este sistema nos ayudará a evaluar expresiones algebraicas para construir las gráficas de funciones así como a entender fenómenos físicos evaluando expresiones con datos reales.
4. **El sistema verbal.** Ejemplo: “La suma de polinomios es asociativa”.

#### 2.1.4. Fenomenología

En este apartado estudiaremos situaciones y contextos que faciliten a los alumnos la funcionalidad de los conceptos físico-matemáticos relacionados con el tiro parabólico a través de su relación con situaciones y fenómenos de la vida real.

Analizar los fenómenos reales asociados a conceptos que se muestran desde una perspectiva teórica presenta un valor añadido en el proceso de aprendizaje y asimilación de aquellos, ya que aportan una motivación extra fuera del aula pues son comprobables y en ellos se advierte su utilidad. Una de las causas para rehuir el acercamiento a las matemáticas suele ser la falta de contextualización: a menudo no se advierte su aplicación práctica, y su estudio se convierte para los profanos en un compartimento estanco, abstracto y simplemente teórico.

Se adjuntan a continuación distintas fichas, **con ejemplos de tiro parabólico**, en las que se presentan situaciones o ejemplos reales, así podemos ver:

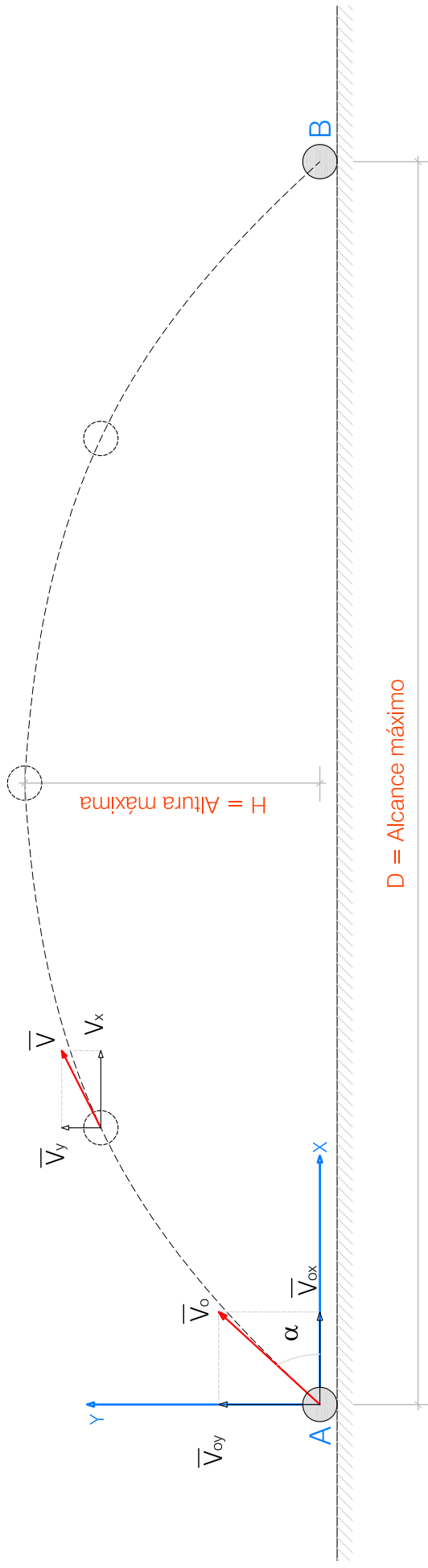
- **Ficha 1:** Condiciones generales del tiro parabólico. Puede ser asociado al disparo de un proyectil por un cañón, un lanzamiento de una jabalina por un deportista, etc.
- **Ficha 2:** Tiro parabólico que describe un balón cuando un futbolista trata de marcar un gol por la escuadra.
- **Ficha 3:** Disparo de un proyectil (lanzamiento de un paquete, etc.) desde un helicóptero.
- **Ficha 4:** Práctica STEM para modelizar la trayectoria de un objeto móvil en un experimento de laboratorio en el que se utilizarán herramientas de video análisis y modelización (programa “Tracker”), herramientas de geometría dinámica (Geogebra) y herramientas de visualización y tratamiento de datos (Excel).

# FICHA 1

## MOVIMIENTO PARABÓLICO

PUNTOS CRÍTICOS DE LA TRAYECTORIA

ALTURA MÁXIMA: H es máxima, cuando  $V_y = 0$   
 ALCANCE MÁXIMO: D es máxima, cuando  $H = 0$



TIRO PARABÓLICO (t : tiempo de vuelo);

Composición de 2 movimientos (Principio de superposición)

1.- Movimiento horizontal: Movimiento uniforme

$$d = V_{0x} \cdot t ; \text{ donde } V_{0x} = v \cdot \cos\alpha$$

2.- Movimiento vertical: Movimiento uniformemente decelerado (ascendente en contra de la gravedad)

$$a_y = -g$$

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t ; \text{ donde } V_{0y} = v \cdot \sin\alpha$$

$$h = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ENUNCIADO DEL PROBLEMA:

CALCULAR LA ALTURA MÁXIMA Y EL ALCANCE MÁXIMO EN UN MOVIMIENTO PARABÓLICO, PARTIENDO DE LOS SIGUIENTES DATOS:

- VELOCIDAD INICIAL:
- ANGULO DE SALIDA CON LA HORIZONTAL

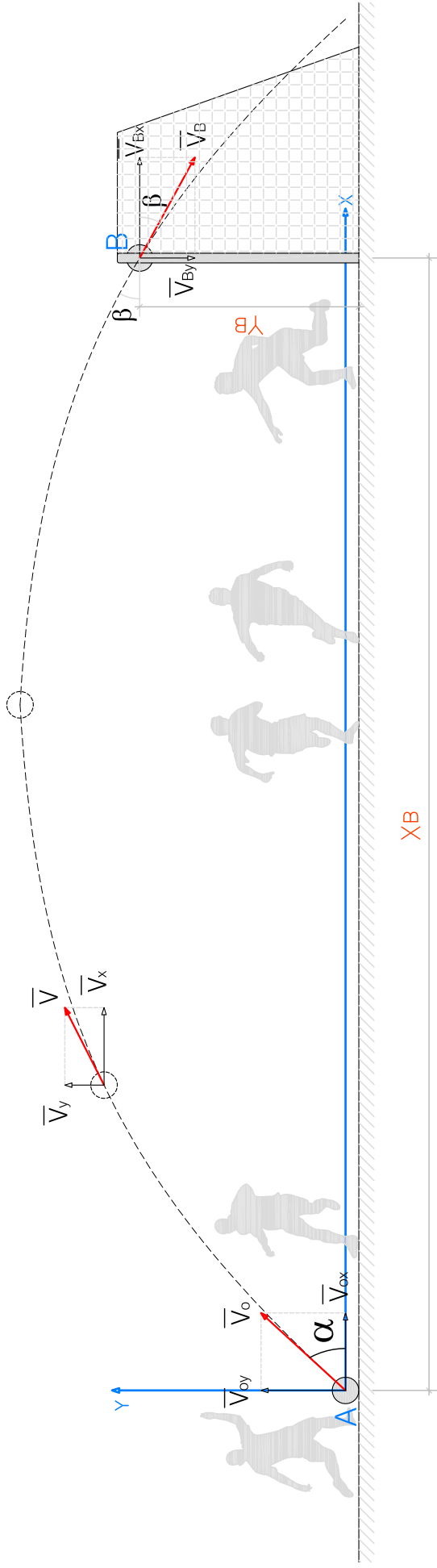
NOTAS:

SE ENTIENDE LA TRAYECTORIA PLANA.

NO SE CONSIDERA LA MASA DEL OBJETO NI LA RESISTENCIA DEL AIRE.

# FICHA 2

## MOVIMIENTO PARABÓLICO



TIRO PARABÓLICO ( $t$ : tiempo de vuelo);

Composición de 2 movimientos (Principio de superposición)

1.- Movimiento horizontal: Movimiento uniforme

$$d = V_{0x} \cdot t ; \text{ donde } V_{0x} = v \cdot \cos\alpha$$

2.- Movimiento vertical: Movimiento uniformemente decelerado (ascendente en contra de la gravedad)

$$a_y = -g$$

$$V_y = V_{0y} - g \cdot t ; \text{ donde } V_{0y} = v \cdot \text{sen}\alpha$$

$$h = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ENUNCIADO DEL PROBLEMA:

CALCULAR LA VELOCIDAD Y ANGULO DE SALIDA DEL BALÓN, PARA QUE EL DELANTERO MARQUE GOL POR LA ESCUADRA, PARTIENDO DE LOS SIGUIENTES DATOS:

- DISTANCIA DEL BALÓN AL EJE DE LA PORTERÍA.
- ALTURA DE LA PORTERÍA BAJO EL LARGUERO.
- DIÁMETRO DEL BALÓN.

NOTAS:

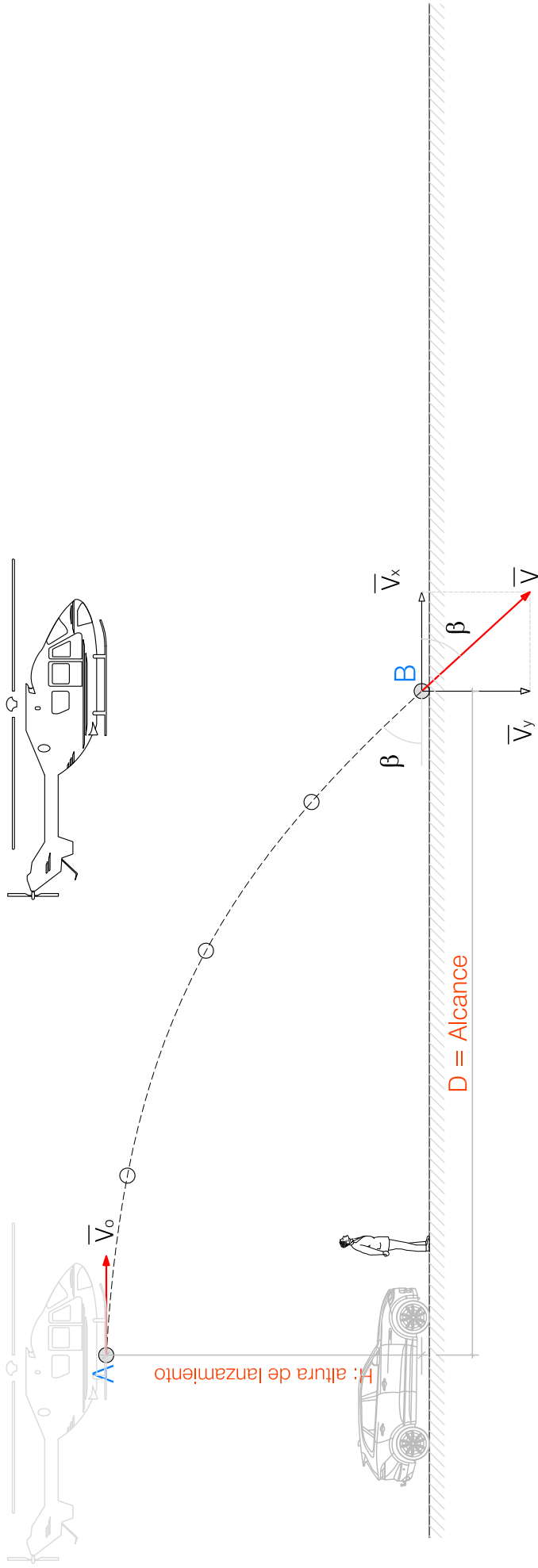
SE ENTIENDE LA TRAYECTORIA DEL BALÓN PLANA. GOLPEO SIN "EFECTO".

NO SE CONSIDERA LA MASA DEL BALÓN NI LA RESISTENCIA DEL AIRE.

SE ADMITE QUE EL TIRO ES INALCANZABLE CUANDO EL BALÓN ENTRA POR LA ESCUADRA, Y ALCANZA LA POSICIÓN DE TANGENCIA AL POSTE LATERAL Y LA LARGUERO CONJUNTAMENTE: (PUNTO A).

# FICHA 3

## MOVIMIENTO PARABÓLICO



TIRO PARABÓLICO (t : tiempo de vuelo);

Composición de 2 movimientos (Principio de superposición)

1.- Movimiento horizontal: Movimiento uniforme

$$d = V_{0x} \cdot t ; \text{ donde } V_{0x} = v \cdot \cos\alpha = v$$

2.- Movimiento vertical: Movimiento uniformemente acelerado (descendente a favor de la gravedad)

$$a_y = g$$

$$V_y = V_{0y} + g \cdot t ; \text{ donde } V_{0y} = v \cdot \text{sen}\alpha = 0$$

$$H = V_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ENUNCIADO DEL PROBLEMA:

CALCULAR LA VELOCIDAD Y ANGULO DE LLEGADA AL SUELO DEL PROYECTIL, PARTIENDO DE LOS SIGUIENTES DATOS:

- ALTURA DE VUELO DEL HELICOPTERO.
- VELOCIDAD DE VUELO.

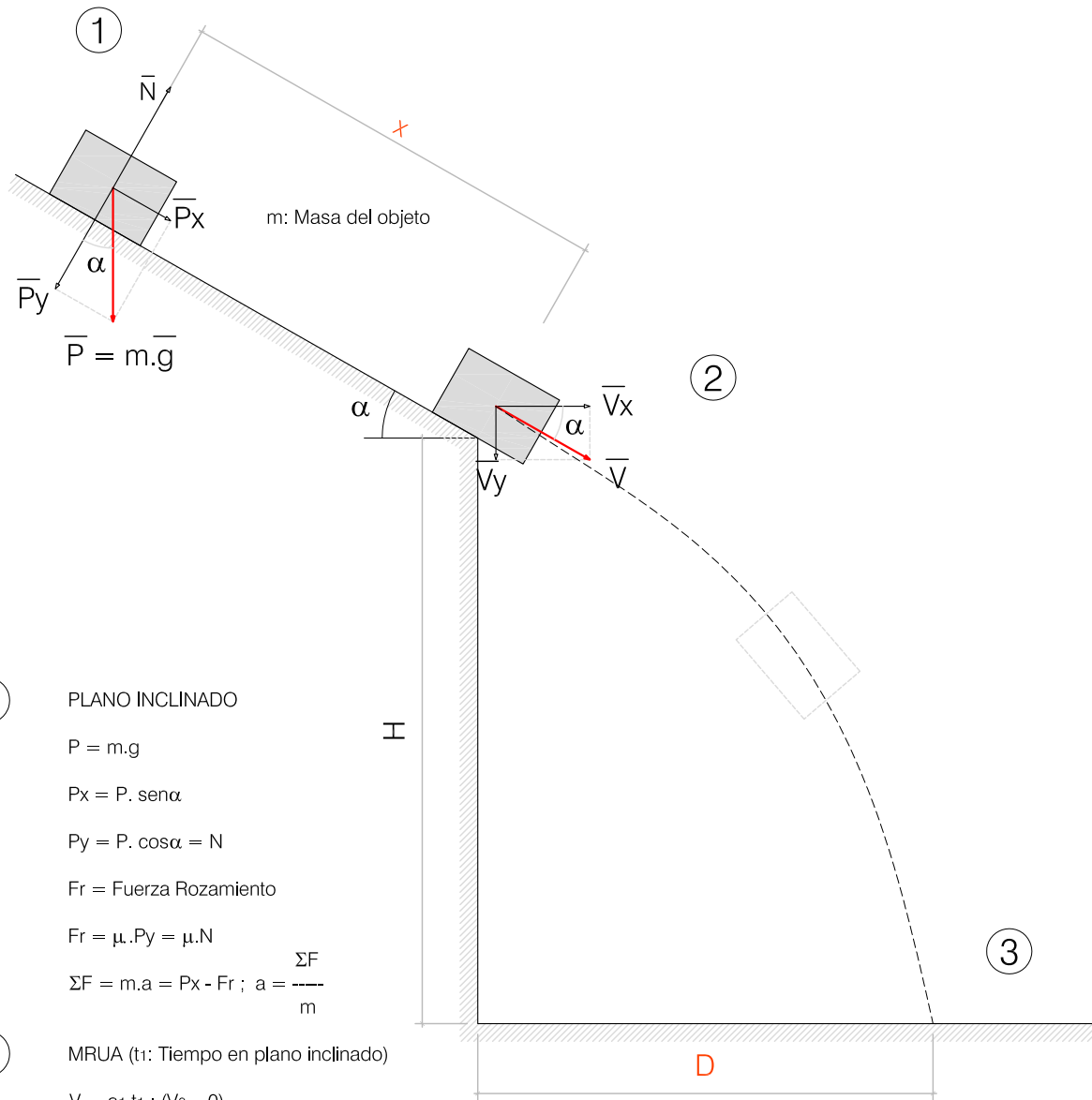
NOTAS:

SE ENTIENDE LA TRAYECTORIA PLANA.

NO SE CONSIDERA LA MASA DEL OBJETO NI LA RESISTENCIA DEL AIRE.

# FICHA 4

## PRÁCTICA STEM MODELIZACIÓN DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO



1

PLANO INCLINADO

$$P = m \cdot g$$

$$P_x = P \cdot \text{sen} \alpha$$

$$P_y = P \cdot \text{cos} \alpha = N$$

Fr = Fuerza Rozamiento

$$Fr = \mu \cdot P_y = \mu \cdot N$$

$$\Sigma F = m \cdot a = P_x - Fr ; a = \frac{\Sigma F}{m}$$

2

MRUA ( $t_1$ : Tiempo en plano inclinado)

$$V = a_1 \cdot t_1 ; (V_0 = 0)$$

$$X = \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 ; (X_0 = V_0 = 0)$$

$$t_1 = \text{SQR} \left( \frac{2 \cdot X}{a_1} \right)$$

3

TIRO PARABÓLICO ( $t_2$ : Tiempo de caída);  $a_y = g$

Movimiento horizontal: Movimiento uniforme

$$d = V_{0x} \cdot t_2 ; \text{donde } V_{0x} = v \cdot \text{cos} \alpha$$

Movimiento vertical: Movimiento uniformemente acelerado

$$V_y = V_{0y} + a_y \cdot t_2 ; \text{donde } V_{0y} = v \cdot \text{sen} \alpha$$

$$h = V_{0y} \cdot t_2 + \frac{1}{2} a_y \cdot t_2^2$$

PRÁCTICA STEM:

MODELIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA PARABÓLICA DE UN OBJETO MÓVIL.

Experimento de laboratorio en el que se utilizarán herramientas de video análisis y modelización (programa "Tracker"), herramientas de geometría dinámica (Geogebra) y herramientas de visualización y tratamiento de datos (Calc, Excel, etc).

Condiciones:

EL OBJETO DE LA FIGURA DESLIZA POR UN PLANO INCLINADO, PARTIENDO DEL REPOSO ( $V_0 = 0$ ), IMPULSADO POR SU PROPIO PESO.

Objetivos:

REALIZAR LAS MEDICIONES, GRABACIONES EN VIDEO Y TOMAR LAS REFERENCIAS NECESARIAS PARA MODELIZAR LA TRAYECTORIA DESCRITA POR EL OBJETO.

Notas:

NO SE CONSIDERA LA MASA DEL OBJETO (SALVO EN EL DESLIZAMIENTO SOBRE EL PLANO INCLINADO) NI LA RESISTENCIA DEL AIRE.

## 2.2. Análisis Cognitivo

En esta subsección nos centraremos en el aprendizaje de los estudiantes. El análisis cognitivo permite a los profesores describir sus hipótesis acerca de cómo el alumno progresa en la construcción del conocimiento cuando se enfrenta a las tareas matemáticas propuestas (al contenido de la unidad didáctica). Estas hipótesis se elaborarán teniendo en cuenta el currículum de matemáticas que establece el Decreto 38/2015, de 22 de mayo, las expectativas sobre las competencias que los estudiantes deben desarrollar y los objetivos didácticos que tienen que aprender, publicado en el BOC. Esta subsección está dividida en tres apartados: competencias (2.2.1), habilidades (2.2.2) y dificultades y errores (2.2.3).

### 2.2.1. Competencias

Si nos fijamos en el currículum de la LOMCE establecido en el BOC, y en particular, en las matemáticas académicas de 4º ESO (pág. 2824), las competencias que aparecen son: la competencia matemática, las competencias en ciencia y tecnología, la competencia en comunicación lingüística, la competencia digital, la competencia *aprender a aprender*, las competencias sociales y cívicas, la competencia *sentido de iniciativa y espíritu emprendedor* y la competencia de *conciencia y expresiones culturales*.

En esta unidad didáctica trabajamos la mayoría de las competencias mencionadas en el párrafo previo. Obviamente, se trabaja la competencia matemática, ya que esta unidad didáctica incluye contenidos de todos los bloques del currículum. Las competencias en ciencias y tecnología son adquiridas por el alumnado ya que esta unidad didáctica se trata de una actividad STEM, puesto que se incluye conocimiento de otra área del conocimiento científico, la física. Los alumnos desarrollarán la competencia digital a través del uso de las herramientas Geogebra y Tracker, que se emplean en la parte experimental de la unidad didáctica. La competencia *aprender a aprender* se trabajará mediante la propuesta de problemas abiertos en el ámbito de la física, donde los alumnos deben relacionar los conceptos matemáticos con sus aplicaciones en la física. Por otro lado, la competencia de *conciencia y expresiones culturales* se incluirá al proponer problemas de la vida cotidiana. Como ya se ha visto en apartados anteriores, la competencia de comunicación lingüística se trabajará a través de problemas contextualizados en los que los alumnos tengan que deducir los objetos matemáticos que necesitan para resolver el

problema a través de su enunciado.

Algo destacable de esta unidad didáctica es que ayuda a los alumnos a percibir las matemáticas como una sola, ya que para resolver el problema del “tiro parabólico”, necesitan aplicar conocimientos de varias áreas de las matemáticas: álgebra, geometría, análisis, estadística, ...

### 2.2.2. Habilidades

En este subapartado vamos a incluir las habilidades específicas que se espera que los alumnos desarrollen a lo largo de la unidad didáctica, tras trabajar y ejercitar los contenidos y procedimientos que se han incluido en la sección 2.

- Analiza y comprende los enunciados de los problemas.
- Es capaz de realizar estimaciones y conjeturas sobre los resultados de los problemas.
- Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
- Realiza operaciones sencillas con polinomios.
- Es capaz de obtener las raíces de una ecuación de 2º grado a través de la fórmula proporcionada en clase.
- Utiliza conceptos y relaciones trigonométricas básicas para resolver problemas usando Geogebra.
- Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una función y asocia gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
- Representa datos mediante gráficos utilizando los ejes adecuados.
- Aplica medidas de centralización y dispersión en problemas contextualizados.
- Aplica técnicas estadísticas a problemas de la vida cotidiana.
- Describe las características fundamentales de una función a través de su gráfica.



- Comprende el concepto de fuerza.
- Conoce y emplea el concepto de magnitud vectorial.
- Emplea razones trigonométricas para descomponer fuerzas.
- Comprende el concepto de movimiento.
- Emplea los conceptos de trayectoria, posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de forma adecuada.

### 2.2.3. Dificultades y Errores

Durante la presente unidad didáctica son diversos los errores que puede cometer el alumnado en función de los diferentes bloques del currículo. El hecho de combinar distintos elementos como pueda ser el álgebra con algunas relaciones trigonométricas aumenta también la dificultad; facilitando los errores.

Además debe tenerse en cuenta que existe una mecánica muy extendida a realizar los ejercicios de matemáticas sin razonar, es decir, el alumnado realiza operaciones sin ser consciente del significado de los cálculos. Esto se detecta habitualmente en las aulas cuando se pregunta por la explicación de un determinado ejercicio o resultado. Este hecho representa una gran dificultad para el alumnado cuando se cambian los “tipos de ejercicios” o se exigen razonamientos “novedosos”.

De forma general existen también un problema asociado a la combinación de elementos de Física y Matemáticas, pues el alumnado ha sido *malacostumbrado* a levantar barreras entre las diferentes asignaturas de secundaria, hecho que a su vez dificulta la propuesta.

Concretando algunos aspectos la experiencia docente (Calandra, 2009) ha registrado diversos errores. En función de los bloques del currículo, en la presente unidad didáctica se tratará de evitar, o al menos se tendrán en cuenta los siguientes errores habituales:

Durante el repaso y el bloque de Algebra y Números.

- Fallo al resolver las ecuaciones bicuadradas donde no deshace el cambio de variable.

- Para evitar este error se propone razonar que la ecuación debe tener cuatro soluciones, además de fijarse en la incógnita que se desea conocer.
- Multiplicación de números y funciones.
  - Deben explicitarse los criterios de las operaciones y respetar e detallar tanto los pasos como los paréntesis.
- Numero de soluciones en una ecuación de segundo grado.
  - o Al resolver este tipo de expresiones se suele olvidar el resultado negativo de la raíz cuadrada, esto generalmente “se corresponde con la realidad física” debido a que la mayoría de magnitudes que se van a medir son positivas; no obstante debe razonarse que matemáticamente la ecuación proporciona dos soluciones.
- Jerarquía de operaciones.
  - No respetar los diferentes pasos y cometer errores, obteniendo **re-sultados** que físicamente son **imposibles**.

Durante el repaso y el bloque de Geometría.

- Valores imposibles en relaciones trigonométricas.
  - Para evitar este error, se debe razonar siempre que valores puede tomar una determinada razón trigonométrica.
- Aplicación del teorema fundamental de la trigonometría.
  - Para evitar este error, se debe razonar siempre que valores puede tomar una determinada razón trigonométrica además de las posibles soluciones de una ecuación de segundo grado.

Durante el repaso y el bloque de Funciones.

- Calculo del vértice de la parábola.

- Para evitar este error, debe comprobarse los signos de los diferentes coeficientes que acompañan a la incógnita ( $a$  y  $b$ ) puede suele obviarse los signos y los resultados no son correctos.
- Representar los datos en el sentido inverso, intercambiando el eje de ordenadas por el eje de abscisas.
  - Para evitar este error debe razonarse que se desea representar y analizar si la gráfica tiene sentido.

## 2.3. Análisis de Instrucción

### 2.3.1. Planteamiento general de las sesiones

Deberíamos reiterar que debemos distinguir 2 actividades diferenciadas:

1. Desarrollo de la unidad didáctica.
2. Actividad complementaria: Como práctica de laboratorio STEM, modelización y análisis práctico de la trayectoria de un objeto móvil que describe un movimiento parabólico.

Cabe destacar que además de las asignaturas referenciadas, matemáticas y física, están implicadas en nuestra práctica herramientas informáticas como el software de geometría dinámica (Geogebra) y la hoja de cálculo (Excel), además de herramientas de video análisis y modelización (programa “Tracker”). Subrayar que Geogebra y Tracker son software libre o de código abierto. La hoja de cálculo Excel puede substituirse por su análoga “Calc” en Openoffice u otras similares.

Los principales contenidos, grosso modo, en el área matemática son:

- Números y Algebra: Ecuaciones de 2º grado (repasso curso anterior)
- Funciones: Funciones y su representación gráfica.
- Geometría: Vectores. Composición de vectores: suma y resta. Trigonometría. Razones trigonométricas.
- Estadística: Tratamiento de datos y estimación de errores.

Análogamente, los contenidos físicos son:

- Aclaración de términos científicos.
- Movimientos. Tipos de movimiento y fuerzas.

Se detalla a continuación la programación temporal de las diferentes sesiones, que determinan el proceso de impartición de la unidad didáctica y la práctica de laboratorio.

Sesión	Bloque o Temática	Materia asociada	Tiempo	Objetivo. Afianzar conocimientos:
1	Repaso de contenidos específicos de 3º ESO	Matemáticas	50'	Expresión algebraica, monomio, variable, incógnita, polinomio univariado, ecuación cuadrática univariada, coeficiente, coeficiente director, polinomio univariado, término independiente, grado y raíz.
2	Bloque 2: Números y Álgebra	Matemáticas	50'	Representación gráfica de funciones. Introduciremos a los estudiantes en el estudio del crecimiento de funciones y a encontrar los extremos de las mismas.
3	Bloque 3: Geometría	Matemáticas	50'	Concepto de vector y operaciones con vectores (suma y resta); descripción de las principales razones trigonométricas de un ángulo.
4	Bloque 5: Estadística	Matemáticas	50'	Tratamiento de datos y estimación de errores.
5	Bloque 1: La Actividad Científica  Bloque 4: El Movimiento y las Fuerzas	Física	50'	Notación científica.  Movimiento, sistema de referencia, distancia, trayectoria, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza e interacción. Tipos de movimientos:
6	Software: Geometría dinámica	Matemáticas	50'	Programa Geogebra.
7	Informática	Informática	50'	Hoja de cálculo; Programa Tracker

**Figura 2:** Programación temporal de las diferentes sesiones.

Por último, desarrollaremos la práctica de laboratorio:

Sesión	Actividad	Materia asociada	Tiempo	Objetivo:
8	Creación del escenario. Generación de la trayectoria. Toma de datos y mediciones	Matemáticas Física Informática TIC	50'	Realizar la práctica en laboratorio de física. Emulación del movimiento con recursos propios o del aula.  Toma de datos y mediciones (metro/medidor laser), grabación en video (tfno. móvil, Tablet, etc).
9	Proceso de modelización. Uso de herramientas de software.	Matemáticas Física Informática TIC	50'	Modelización del movimiento, utilizando las herramientas descritas: Tracker, Geogebra y hoja de cálculo.  Interpretación de los resultados.

**Figura 3:** Programación temporal de las diferentes sesiones.

### 2.3.2. Papel y agrupamiento de los estudiantes

Nuestro enfoque y práctica docente puede actuar mediante estrategias de aprendizaje cooperativo, formación de grupos heterogéneos, atendiendo al sexo, a las capacidades y a su diversidad cultural. Esto provoca la mezcla, el “mestizaje” y la comprensión entre sus miembros. Que se sientan reflejados, no comparados, y mucho menos, ridiculizados. Debemos alimentar ese escenario devolviendo información adecuada.

### 2.3.3. Papel del profesor

El docente debe llegar a su objetivo a través del uso del aprendizaje como herramienta, como un objetivo en sí mismo, pues su uso es un “saber” adicional. La herramienta en sí como constructora de conocimiento que permite al alumno construirlo, deshacerlo, reorganizarlo.

Es fundamental complementar el estudio teórico con la práctica de laboratorio y acercar las matemáticas a la realidad, pero a la vez poner de relieve

que el conocimiento y el avance tecnológico no viene de una única disciplina, más bien al contrario del trabajo conjunto de las diferentes ramas científicas, provoca reflexión y visiones holísticas del mundo científico.

Por otra parte las estrategias de trabajo, de reflexión sobre el propio razonamiento, es algo que debe introducir el docente en el aula. En el contexto educativo, estas habilidades metacognitivas se relacionan con «aprender a aprender».

También se analiza en esta práctica la fase de comprobación de resultados, fase definitiva a la que a menudo no llega el adolescente. Así en el laboratorio, cuando analizamos la ecuación cuadrática que define el movimiento, apreciamos la presencia de la gravedad,  $g$  (realmente como  $0,5 g$ ), lo que nos permite evaluar nuestro trabajo y su índice de error de un solo vistazo. Esto provoca la reflexión sobre lo fidedigno de los resultados obtenidos.

## 2.4. Análisis de Evaluación

El proceso de evaluación está regulado por la normativa vigente, que a fecha del presente documento es la Ley Orgánica 8/2013 para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE); en este documento legal se establece que la evaluación deberá ser **continua, formativa e integradora** (Ley Orgánica 8/2013 Art. 28.1). Estos elementos vienen justificados en la presente unidad didáctica de la siguiente manera:

La evaluación continua valorará de manera subjetiva elementos transversales de currículo que están asociados a alcanzar algunos objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) concretamente en esta unidad: *la educación en la responsabilidad individual y en el mérito y esfuerzo personal junto con la adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, de conocimientos científicos y técnicos* (Ley Orgánica 8/2013 Art. 2).

La evaluación formativa corresponde a la última etapa en el proceso de aprendizaje del alumnado. Esta herramienta constituye una valoración de los conocimientos aprendidos y puede aplicarse a través de diferentes metodologías (*examen, trabajos, ejercicios, problemas, presentación, etc.*) cuyo objetivo es enfrentar al alumnado problemas que debe resolver en base a sus conocimientos.

La evaluación integradora está relacionada con la realidad de los centros que presenta una amplia diversidad de alumnado. Este proceso, presente también en la normativa vigente, implica establecer *las medidas más adecuadas para que las condiciones de realización de las evaluaciones se adapten a las necesidades del alumnado con necesidades educativas especiales* (Ley Orgánica 8/2013 Art. 20.1). Sin ir más lejos, esta herramienta, que representa una medida de Atención a la Diversidad, implicará la evaluación personalizada de aquellos alumnos/as que por diferentes motivos requieran actividades de refuerzo o modificaciones del currículo (significativas o no) [Para más información debería consultarse el capítulo de Atención a la Diversidad de la correspondiente Programación Didáctica donde está comprendida la presente unidad].

Los diferentes elementos presentados anteriormente se materializan en la unidad didáctica a través de los siguientes criterios (2.4.1), instrumentos (2.4.2) y modelos de evaluación (2.4.3).



### 2.4.1. Criterios de evaluación

La evaluación de contenidos se hará teniendo en cuenta el Decreto 38/2015 por el que se establece el Currículo de la Educación Secundaria y el Bachillerato Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Cantabria. Dada la diversidad de temas que engloba el bloque propuesto, se relacionan los criterios de evaluación con los diferentes bloques del currículo; los cuales serán evaluados a través de diversos procesos (3) e instrumentos (2.4.1). Por otro lado se presentan los estándares de aprendizaje evaluables recogidos, de la misma manera, en la legislación.

A continuación, se recogen los criterios de evaluación para cada unidad didáctica:

#### 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

- a) Expresar, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
- b) Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- c) Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
- d) Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
- e) Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.
- f) Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
- g) Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas

## 2. Números y Álgebra

- a) Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.
- b) Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.
- c) Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.

## 3. Geometría

- a) Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
- b) Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.

## 4. Funciones

- a) Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
- b) Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.

Ahora, se expondrán los Estándares de Aprendizaje presentes en la Unidad Didáctica:

## 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

- a) Expresa, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
- b) Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
- c) Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
- d) Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
- e) Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso seguido.
- f) Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
- g) Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
- h) Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico-probabilístico.
- i) Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
- j) Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
- k) Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- l) Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
- m) Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.

- n)* Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

## 2. **Números y Álgebra**

- a)* Opera con eficacia empleando cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o programas informáticos, y utilizando la notación más adecuada.
- b)* Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables.
- c)* Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
- d)* Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.

## 3. **Geometría**

- a)* Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
- b)* Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
- c)* Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
- d)* Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.
- e)* Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

## 4. **Funciones**

- a)* Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
- b)* Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.

- c) Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.
- d) Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
- e) Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
- f) Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definida a trozos, exponencial y logarítmica.
- g) Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
- h) Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
- i) Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.
- j) Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Además de los elementos presentes en la legislación que se trataran en mayor o menor medida destacan algunos relacionados directamente con el currículo de Física y Química, asignatura con la que se considera oportuno plantear la presente unidad de forma paralela. A modo de justificación se encuentran elementos, como por ejemplo en el bloque de Geometría, (*calcular la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector o conocer el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla*) que están directamente relacionados con el currículo de Física y Química (*vectores, velocidad, aceleración, modulo, concepto de la velocidad “como derivada” de la aceleración, etc.*).

Por otro lado se establecen para esta unidad unos criterios de evaluación y estándares de aprendizaje específicos relacionados con una metodología STEM la cual sería idónea para su implantación.

#### ■ Criterios de Evaluación

1. Desarrolla una actitud activa en el desarrollo de las prácticas de laboratorio.
2. Presenta interés y propuestas acordes a las actividades planteadas.
3. Utiliza de manera adecuada los recursos TIC, concretamente, Tracker y GeoGebra.

#### ■ Estándares de Aprendizaje

1. Realiza las prácticas de manera adecuada y conforme al rigor científico.
2. Presenta un espíritu emprendedor durante el trabajo en el laboratorio.
3. Resuelve los problemas y representa los resultados de manera adecuada.

### 2.4.2. Instrumentos de evaluación

La evaluación de la presente unidad didáctica tiene lugar a través de un proceso continuo, que valora la actitud y la realización de las actividades propuestas en el cuaderno de la asignatura (3), y un proceso final basado en un informe y su presentación oral ante el aula.

- Instrumentos de evaluación continua. La evaluación continua se realizará a partir de la actitud (comportamiento, responsabilidad, puntualidad, etc.) y del trabajo realizado diariamente (cuaderno de actividades). Así mismo se establecerán la siguiente rúbrica para suavizar la subjetividad de este proceso:

Ámbito	Actitud	Necesita Mejorar	Adecuado	Sobresaliente
Fuera de la Jaula	Realiza las tareas propuestas	No suele hacer los deberes	Excepcionalmente no hace los deberes. En el momento de la evaluación el cuaderno está completo	Hace los deberes diariamente. El cuaderno recoge todas las actividades
	El cuaderno	El cuaderno está incompleto	El cuaderno esta completo únicamente en el momento de la evaluación	El cuaderno esta completo todos los días del curso
	Resolución de ejercicio y/o problemas	No explica nada. Aparecen enunciados y soluciones	Problemas muy esquematizados. Aparecen enunciados, algunos pasos intermedios y la solución final	Problemas resueltos en detalle
	Presentación de las actividades	Cuaderno sucio y desordenado	Cuaderno sucio pero organizado en bloques	Cuaderno limpio y organizado
	Evaluación de las actividades	Las tareas están mal resueltas	En balance la mayoría de las tareas están bien resueltas	Salvo pequeñas excepciones, las tareas están resueltas adecuadamente
En la Jaula	Corrección de actividades	En clase no corrige las actividades	Corrige la mayoría de las sesiones	Corrige siempre las actividades
	Turno de palabra	No respeta los turnos de palabra	Es impulsivo cuando no entiende algo, no obstante no interrumpe	Respeta los turnos de palabra
	Respeto	No respeta a los compañeros	No se relaciona con los compañeros	Respeta y se comunica con los compañeros
	Trabajo de equipo	No ayuda a sus compañeros	Colabora con los compañero	Coopera con los compañeros
	Actitud	No participa en clase	Participa únicamente cuando no hay alternativa	Suele ofrecerse voluntario para los trabajos de aula

**Figura 4:** Rúbrica de valoración del cuaderno y otros elementos transversales.

- Instrumentos de evaluación final.

Además del proceso de evaluación continua la presente unidad didáctica será evaluada a través de un **informe individual** sobre las prácticas realizadas en el laboratorio que representa la evaluación formativa. Este informe, que deberá tener el rigor científico correspondiente a la etapa del sistema educativo, será entregado al final de la unidad y deberá contener los procedimientos y resultados obtenidos en el laboratorio. Además se realizará una exposición oral por parte del alumnado en grupos y presentando únicamente los resultados de un informe de los miembros del equipo. El procedimiento se llevará a cabo ponderando un 60 % el informe y un 40 % la presentación.

La valoración del informe (60 %) se ceñirá a los siguientes criterios:

1. Estructura: Resumen, índice, introducción, procedimiento experimental, resultados, análisis, discusión y/o conclusiones, y en su caso referencias. → 10 %
2. Contenidos. → 20 %
3. Presentación, claridad y rigor matemático en las expresiones. → 20 %
4. Presentación, claridad y rigor matemático en las expresiones. → 20 %
5. Resultados coherentes y correctos o en su caso una discusión adecuada del error o errores cometidos. → 10 %

La valoración de la presentación (40 %) se ceñirá a los siguientes criterios:

1. Claridad expositiva y capacidad de argumentación. → 20 %
2. Conocimiento global de la ponencia, incluidas las partes expuestas por compañeros o compañeras. → 20 %

### 2.4.3. Modelo de evaluación

La evaluación tendrá lugar respetando los criterios generales acordados por el centro y transmitidos a los diferentes departamentos didácticos a través de la CCP. En su caso establece de forma general que la actitud representará un 20 % de la nota mientras que la evaluación final ponderará el 80 % restante; quedando a criterio de cada departamento la valoración del cuaderno y en su caso el porcentaje asociado nunca superior al 20 %. Por tanto en el marco del



centro donde se encuentra propuesta, la presente unidad didáctica se articula de la siguiente manera:

	Concepto		Específico		Total
Actitud	Aula	Comportamiento	10 %	20 %	40 %
		Participación	10 %		
	Trabajo autónomo	Deberes	10 %	20 %	
		Cuaderno	10 %		
Evaluación final	Informe presentación		60 %	36 %	60 %
			40 %	24 %	

**Cuadro 1:** Modelo de evaluación considerando los diferentes instrumentos

\* Se tendrán en cuenta los elementos reflejados en la programación didáctica; especialmente en materia de atención a la diversidad, pudiendo existir cambios en el proceso de evaluación, siempre que el departamento de Orientación así lo apruebe.



### 3. Diseño de tareas o actividades a presentar al alumno

En esta sección se presentan tareas, actividades y problemas a realizar por el alumnado y que favorecen el aprendizaje de los diferentes contenidos que recoge la unidad. La estructura aquí propuesta tiene carácter docente no siendo en cuerpo y forma propuesta de la misma manera para estudiantes. Las tareas propuestas estarán formados por colecciones de ejercicios de diferentes bloques en función del desarrollo de las clases y siempre respetando la planificación (**ref. índice 2.3.1**). A continuación, buscando la mayor claridad expositiva, se presentan las propuestas en función de los bloques del currículo de Secundaria.

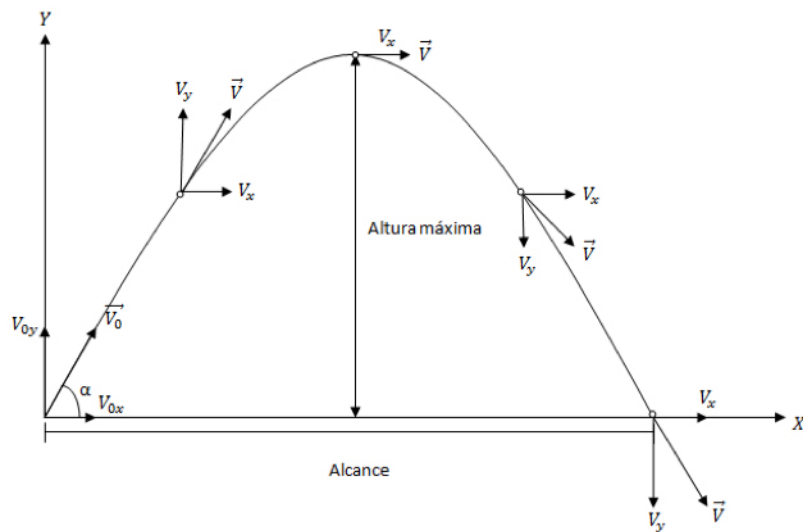
#### Ejercicios Tiro Parabólico - Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas

1. Una pelota es lanzada con un ángulo de  $60^\circ$  respecto al suelo con una velocidad de 30 m/s. Calcular la altura máxima de la pelota y el alcance máximo.
2. Un proyectil es lanzado desde el suelo con una velocidad de 100 m/s un ángulo de  $45^\circ$  calcular el vector velocidad y posición del proyectil al cabo de 3 segundos.
3. Un futbolista chuta un balón hacia la portería con una velocidad de 30m/s y un ángulo de  $30^\circ$ . Calcular:
  - a) Altura máxima
  - b) El alcance
  - c) Vector velocidad al llegar al suelo
4. Un alumno chuta una pelota que está en el suelo con una velocidad inicial de 28 m/s y un ángulo de  $40^\circ$ . A 75 m del punto de lanzamiento hay un muro de 2,5 m de altura. Determinar que sucederá entre las siguientes opciones: Si la pelota pasará por encima del muro, chocará contra este o caerá al suelo antes de llegar a este.

5. Messi centra un balón con una velocidad de salida de 20 m/s y un ángulo con el suelo de  $60^\circ$ . El balón golpeará en la cabeza de Iniesta (*sin saltar ni agacharse*) situado a 34.3 m de distancia. Determinar la altura de Iniesta.
  
6. Un saltador de longitud salta 8 metros cuando lo hace con un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Calcular la velocidad inicial del saltador.
  
7. Un arquero, realizando el máximo esfuerzo, es capaz de impulsar una flecha a una velocidad inicial de 80 m/s. Si dispara con un ángulo de  $30^\circ$ . Determine:
  - a) ¿Pasará la flecha por encima de un promontorio de 50 m de alto situado a 100m de distancia?
  - b) ¿Qué velocidad tiene la flecha en la vertical del promontorio?
  
8. Se dispara un cañón con un ángulo de inclinación de  $60^\circ$  y una velocidad de salida del proyectil de 30 m/s cayendo, éste, posteriormente en una plataforma situada a 4 m del suelo. Calcula:
  - a) Tiempo que tarda en caer
  - b) Velocidad de caída del proyectil
  
9. En la final de Champions entre el Real Madrid y Liverpool, Bale marcó un golazo de chilena. Si Bale golpeó el balón desde una altura de 1,6 metros, con una velocidad  $v = 13,5$  m/s y un ángulo  $\alpha=20$  Sabiendo que la portería se encontraba a 10 metros de distancia, calcula la altura y la velocidad con la entró el balón en la portería.

\* Este bloque se completa con la realización de la práctica cuyo guión se presenta en el Anexo I.

## Ejercicios Tiro Parabólico - Bloque 2: Números y Álgebra



**Figura 5:** Descripción visual del Tiro Parabólico.

Partiendo de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme (MRU) para la coordenada horizontal  $x = x_0 + v_{0x}t$  y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) para la coordenada vertical  $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$  determina las siguientes expresiones algebraicas:

- Tiempo de movimiento
- Altura máxima
- Alcance

[Dada la FICHA 4]

En una situación donde se deja caer un cuerpo del reposo desde la parte superior del plano inclinado, determinar la expresión de la velocidad al final del mismo, que será a su vez la velocidad inicial del tiro parabólico.

El tiro parabólico está regido por una ecuación de segundo grado, para poder desentrañar sus misterios arcanos deberás ser un experto resolviendo este tipo de ecuaciones:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas aplicando el método más conveniente en cada caso -no vale utilizar la fórmula general-, y comprobar en cada caso las soluciones obtenidas:

$$x^2 - 5x = 0$$

Solución:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$

$$x^2 + 8x = 0$$

Solución:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$

$$x^2 = x$$

Solución:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$

$$16x + 4x^2 = 0$$

Solución:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -4$

$$x(x + 2) = 0$$

Solución:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de 2º grado, teniendo en cuenta que:
- Las ecuaciones completas se resolverán mediante la conocida fórmula general.
  - Las incompletas deberán ser resueltas como en el ejercicio anterior, no mediante la fórmula general.
  - Las ecuaciones factorizadas no deben ser pasadas a la forma general, sino resueltas directamente.

- En ambos casos, y siempre que sea posible, se simplificarán los coeficientes antes de resolver.
- En todos los casos hay que comprobar las soluciones obtenidas

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Solución:  $x_1 = 2, x_2 = 4$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución:  $x_1 = -1, x_2 = 3$

$$3x^2 - 10x + 7 = 0$$

Solución:  $x_1 = 1, x_2 = 7/3$

$$2x^2 - 8 = 0$$

Solución:  $x = \pm 2$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

Solución:  $x_1 = -2, x_2 = 5$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Solución:  $x_1 = 3, x_2 = 1$

$$4x^2 + 11x + 3 = 0$$

Solución:  $x_1 = 1/4, x_2 = -3$

$$3x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$\text{Solución: } x = 1 \pm \sqrt{3}$$

- *La resolución de ecuaciones de 2º Grado es propia del currículo de 3º ESO; no obstante se considera necesario repasar estos aspectos en la presente unidad didáctica favoreciendo así una mejor comprensión de las ecuaciones de grado superior que se plantearán en otras unidades del curso y son introducidas a continuación.*

3. Resolver las siguientes ecuaciones factorizadas -o factorizables-, y comprobar el resultado:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1)(x - 3) = 0$$

$$\text{Solución: } x = \pm 2 \text{ } x = 3$$

$$(x^2 - 3x)(2x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = -3/2$$

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$$

$$(3x^2 - 12)(x^2 - x + 2)(x^2 + 1) = 0$$

$$\text{Solución: } x = \pm 2$$

$$(x^2 - x - 2)(x^2 + 9) = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = -1, x_2 = 2$$



$$12x^3 - 2x^2 - 2x = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 0, x_2 = 1/2, x_3 = -1/3$$

$$(3x^2 + 12)(x^2 - 5x)(x - 3) = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 5$$

$$x^4 - 16x^2 = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0, x = \pm 4$$

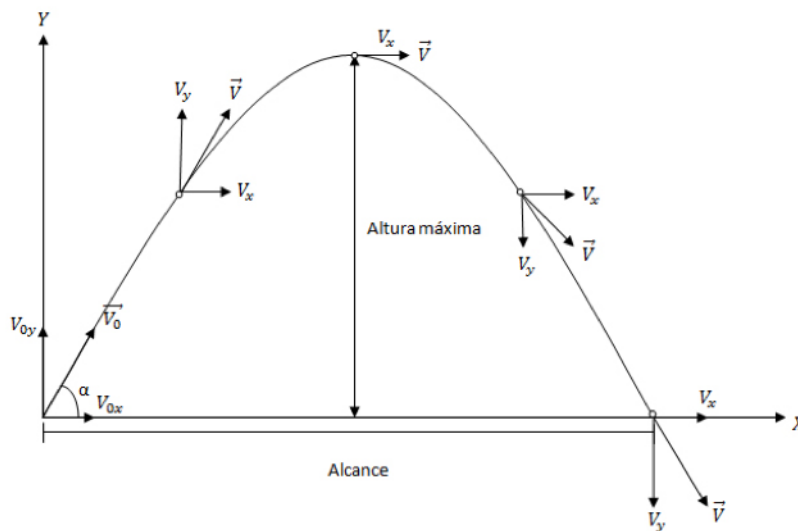
$$(x + 1)^2(x - 3) = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = -1, x_2 = 3$$

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 4) = 0$$

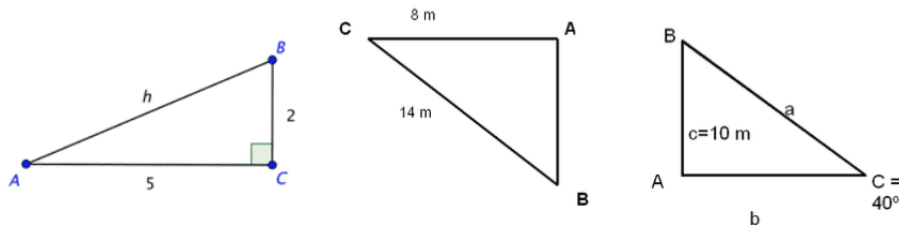
$$\text{Solución: } x_1 = -1, x_2 = 2$$

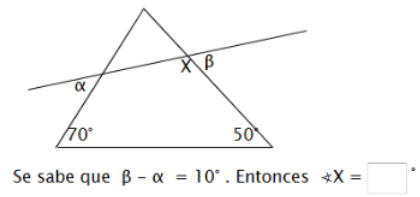
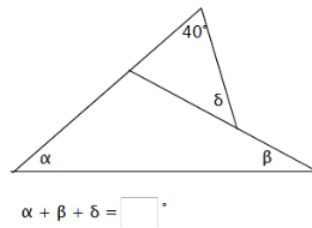
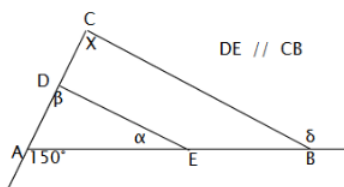
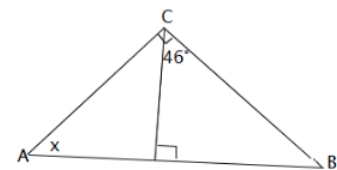
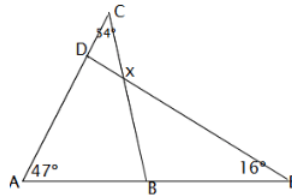
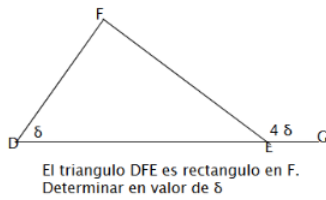
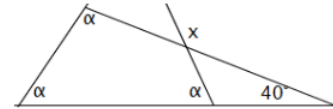
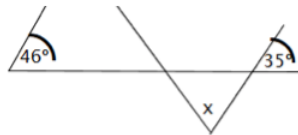
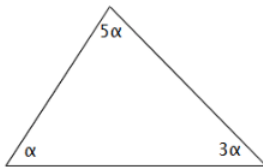
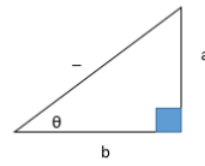
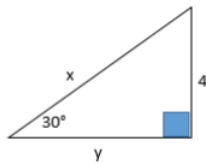
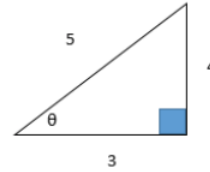
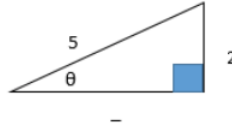
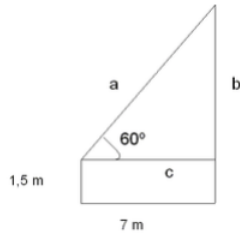
### Ejercicios Tiro Parabólico - Bloque 3: Geometría



**Figura 6:** Fuerzas del Tiro Parabólico

1. Determinar las componentes de la velocidad inicial ( $v_0$ ) empleando las razones trigonométricas.
2. Durante el trabajo en el laboratorio será necesario determinar ángulos en planos inclinados a fin de comprobar los resultados y componentes medidas. Antes de medir plantea en tu cuaderno la estrategia de medida más apropiada para determinar el ángulo de un triángulo rectángulo, si dispones únicamente de una regla.
3. Resuelve los siguientes triángulos, relacionados con el plano inclinado, determinado sus los ángulos y lados:





- Algunos ejercicios son de repaso, no obstante se práctica en esta sección para inducir el razonamiento a figuras más complejas. En el laboratorio se propone determinar ángulos empleando la escuadra y el cartabón para buscar relaciones entre figuras e ir obteniendo los diferentes ángulos como se muestra en algunos de los ejercicios propuestos.

[Dada la FICHA 4]

Determinar las componentes de la fuerza peso para un punto intermedio.

## Ejercicios Tiro Parabólico - Bloque 4: Funciones

1. Dibuja y argumenta (escribiendo razonamientos) las siguientes expresiones:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 1, x_2 = -3$$

$$2x^2 + ax - 3a^2 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = a, x_2 = -3a/2$$

$$4x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = -3/2, x_2 = 1/2$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = -1/3, x_2 = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = -1, x_2 = -3$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$\text{Solución: } x_1 = 5, x_2 = -7$$

$$x^2 - 10x + 25 = 1 = 0$$

Solución:  $x_1 = 4, x_2 = 6$

$$2x^2 - 11x + 5 = 0$$

Solución:  $x_1 = 5, x_2 = 1/2$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Solución:  $x_1 = 1, x_2 = 1/2$

$$3x^2 - 19x + 20 = 0$$

Solución:  $x_1 = 5, x_2 = 4/3$

2. Representa gráficamente la parábola que se ajusta a las siguientes tablas de datos. Determina mediante argumentos su expresión algebraica.

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
-2	0	0	0	-3/2	0	-4	13
-1	-6	-6	132	0	-15	0	5
0	-10	-1	7	2	-21	1	8
1	-12	2	4	5	0	3	20
5	0	4/3	0	7	34	10	125

3. Determina mediante argumentos la expresión algebraica. Tabula un registro de al menos 10 valores de las siguientes figuras.

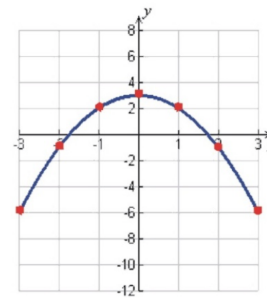
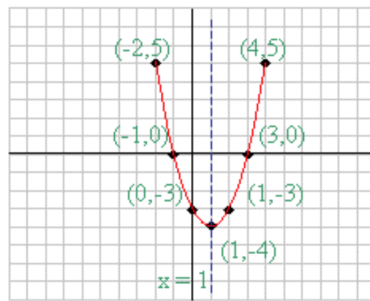
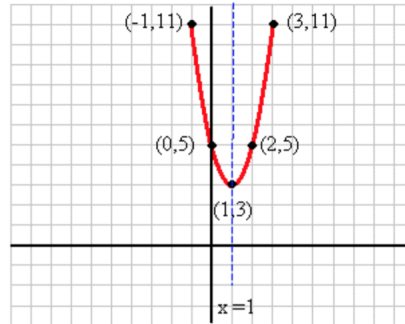
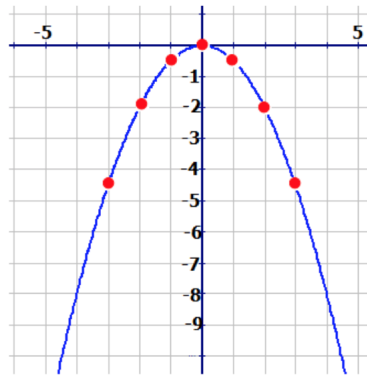


Figura 7: Gráficas

## Referencias

- [1] Apostol, T. M. (1967). *Calculus: Cálculo con funciones de una variable*. Ed. Reverté.
- [2] Catalá, J. (1984). *Física*. Madrid, España: Cometa.
- [3] Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la comunidad autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria*. Cantabria, 5 de junio de 2015, núm. 39, pp. 2711-3784.
- [4] Hungerford, T. W. (1974). Ed. Springer-Verlag.
- [5] Lang, S. (1971). *Álgebra*. Ed. Aguilar.
- [6] Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*. España, 6 de Agosto de 1970, núm. 187, pp. 12525-12546.
- [7] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 30 de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921.
- [8] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp. 169-546.
- [9] Mood, M, Graybill, F. A. (1973). *Introducción a la Teoría Estadística*. Ed. Aguilar.
- [10] Tipler, P. A., Mosca, G. (2010). *Física para ciencia y tecnología, Vol. 1: Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*. Ed. Reverté, 6ª Edición.
- [11] Valderrama, F. (2000). *La UNESCO y la educación: antecedentes y desarrollo*.
- [12] Calandra, J. (2009). *Como superar las matemáticas de secundaria* Consejería de Educación: Cantabria.